

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Álgebra Conmutativa</b>	<b>3</b>
1.1. Definiciones y Propiedades . . . . .	3
1.2. El Ideal Jacobiano. . . . .	12
<b>2. Singularidades</b>	<b>19</b>
2.1. Singularidades Aisladas. . . . .	19
2.2. Cohomología de complejo Koszul para $I = \langle f, g \rangle$ . . . . .	29
2.2.1. El Complejo $L_j$ . . . . .	30
2.2.2. Una Generalización del Complejo de Koszul . . . . .	39
2.2.3. Cálculo de la cohomología de $L_j$ . . . . .	41

# Introducción

Este minicurso presenta una introducción a las singularidades aisladas de tipo intersección completa. Desarrollamos herramientas que nos permiten demostrar algunas propiedades básicas de las singularidades aisladas. En el caso de una hipersuperficie mostramos que la singularidad aislada esta caracterizada localmente por la altura de su ideal jacobiano. Estudiamos el caso de intersección completa. Presentamos una generalización del complejo Koszul, y estudiamos su cohomología.

Estas notas están organizadas de la siguiente manera:

El primer capítulo se divide en dos secciones. En la primera de ellas desarrollamos los conceptos y propiedades de álgebra conmutativa que se usan en el trabajo. En la segunda sección presentamos la buena definición del ideal jacobiano sobre un anillo  $(R, \eta)$  regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f.) que generaliza la definición para polinomios.

En el segundo capítulo mostramos que  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada si sólo si  $ht(J_f) = m = \dim(R)$ . Calculamos la cohomología del complejo Koszul. Para singularidades de tipo intersección completa (icis) calculamos la altura de su ideal jacobiano. Generamos estas singularidades en función de singularidades de hipersuperficies. Estudiamos la cohomología de ciertos complejos  $L_j$  que generalizan el complejos Koszul y calculan la homología de Hochschild.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a los organizadores del *XXXII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana* por permitirme participar en este gran evento.

Rubén E. Burga Barboza  
UNPRG

# Capítulo 1

## Álgebra Conmutativa

En este capítulo presentamos las definiciones y propiedades de la teoría de anillos que usaremos más adelante. Aquí también se presenta la buena definición de *El Ideal Jacobiano* y de una singularidad aislada.

### 1.1. Definiciones y Propiedades

Todos los anillos tratados son noetherianos. Entre las principales definiciones que usaremos se encuentra la *dimensión de Krull*.

**Definición 1.1.** Sea  $R$  un anillo. La **dimensión de Krull** o simplemente la dimensión del anillo  $R$ , denotada como  $\dim(R)$ , es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos en  $R$ . Es decir,  $\dim(R) = n$  si existe una cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

y ninguna cadena es más grande.

**Ejemplo 1.2.** Si  $R = k$  es un cuerpo, el único ideal primo es  $P_0 = (0)$ . Esto significa que  $\dim(R) = 0$ .

**Ejemplo 1.3.** Si  $R = k[x]$ , y  $k$  cuerpo entonces  $\dim(R) = 1$ .

**Ejemplo 1.4.** Si  $R = k[x]/I$ ,  $k$  cuerpo, con  $I$  ideal propio no nulo entonces la dimensión de  $R$  es cero.

**Definición 1.5.** Sea  $I$  un ideal primo de  $R$ . Definimos la **altura**  $ht(I)$  del ideal  $I$  como el supremo de la longitud de las cadenas de primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I = P_n.$$

que finalizan en  $I$ .

Si el ideal  $I$  no es primo definimos la **altura** del ideal  $I$  como el mínimo de las alturas de los primos  $P$  que contienen a  $I$ .

**Observación.** Cabe resaltar que algunos autores (ej [Eis]) a la altura del ideal  $I$  la llaman **codimensión**.

Si el anillo  $(R, \eta)$  es local entonces

$$\dim(R) = ht(\eta).$$

**Proposición 1.6.** Sea  $x \in R$  y  $P$  un ideal primo minimal entre los primos que contienen a  $x$ , entonces  $ht(P) \leq 1$ .

**Prueba.** Sin pérdida de generalidad podemos pensar que  $R$  es local y  $P$  es su ideal maximal. Sea  $Q$  ideal primo tal que  $Q \subset P$  y  $Q^{(n)}$  la imagen inversa en  $R$  del ideal  $Q_Q^n \subset R_Q$ . Como  $R/(x)$  es artiniiano entonces la cadena descendente

$$\dots \subset \overline{Q^{(n)}} \subset \overline{Q^{(n-1)}} \subset \dots \subset \overline{Q^{(1)}}$$

es estacionaria. Esto implica que  $Q^{(n)} + (x) = Q^{(n+1)} + (x)$ . De aquí se prueba que

$$(x)Q^{(n)} + Q^{(n+1)} = Q^{(n)}.$$

El lema de Nakayama nos indica que  $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$ . Es decir  $Q_Q^n = Q_Q^{n+1}$  en el anillo  $R_Q$  esto significa que  $Q_Q^n = 0$  y  $R_Q$  tiene dimensión cero. ■

**Teorema 1.7.** Sea  $x_1, \dots, x_n \in R$  y  $P$  ideal primo minimal entre los primos que contienen a  $x_1, \dots, x_n$ . Entonces  $ht(P) \leq n$ .

**Prueba.** La demostración será por inducción. El caso  $n = 1$  se sigue de la proposition anterior. Supongamos que el teorema se cumple para  $n - 1$ . Sea  $P$  un ideal primo minimal del ideal  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el anillo  $R$  es local con maximal  $P$ . Sea  $P_1$  primo contenido en  $P$  tal que no existe ideal primo entre ellos. El ideal  $P_1$  no puede contener a todos los elementos  $x_1, \dots, x_n$ , entonces existe  $x_1$  tal que  $x_1 \notin P_1$ . En el anillo  $R/(x_1, P_1)$  todos los elementos del maximal son nilpotentes.

Entonces existe  $n$ , suficientemente grande, tal que  $x_i^n \in (x_1, P_1)$  se puede escribir como

$$x_i^n = a_i x_1 + y_i,$$

con  $y_i \in P_1$  para  $2 \leq i \leq n$ . En el anillo  $R/(y_2, \dots, y_n)$ ,  $\overline{P}$  es minimal entre los que contienen a  $\overline{x}_1$ ; de la proposición anterior  $ht(\overline{P}) \leq 1$ . Como  $P_1 \subset P$  entonces  $ht(\overline{P}_1) = 0$ . Esto nos indica que  $P_1$  es minimal entre los  $y_1, \dots, y_{n-1}$ . Entonces de la hipótesis inductiva  $ht(P_1) \leq n - 1$ . Como  $P_1$  es arbitrario,  $P_1 \subset P$  y no existe primo entre ellos, entonces  $ht(P) \leq n$  ■

El teorema anterior se llama P.I.T. (según sus siglas en inglés de Principal Ideal Theorem.)

**Corolario 1.8.** *Para todo primo  $P$  con  $ht(P) = c$  existe un ideal  $I$  generado por  $c$  elementos de modo que  $P$  sea minimal entre los primos que contienen al ideal  $I$ .*

**Prueba.** [Eis, Corolario 10.5]. ■

**Definición 1.9.** Diremos que un anillo local  $(R, \eta)$  es regular si y sólo si

$$\dim Krull(R) = \dim_k \left( \frac{\eta}{\eta^2} \right)$$

donde  $k = R/\eta$ .

**Lema 1.10.** *Si  $(R, \eta)$  es un anillo regular local entonces  $R$  es un dominio.*

**Prueba.** [Eis, Corolario 10.14]. ■

**Definición 1.11.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local de dimensión  $n$ . El conjunto  $x_1, \dots, x_n$  se llama una **secuencia de parámetros** si sólo si

$$\eta^j \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \eta,$$

para algún  $j \in \mathbb{N}$ . Si además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \eta$  la secuencia se llama **secuencia regular de parámetros**

**Lema 1.12.**  *$(R, \eta)$  es un anillo regular local si sólo si  $\eta$  posee una secuencia regular de parámetros.*

**Prueba.** Sea

$$\dim(R) = \dim_k(\eta/\eta^2) = n,$$

y  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  una base del espacio vectorial  $\eta/\eta^2$ . Tomemos  $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \eta$  y  $\eta/I$ . Como  $\bar{I} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle = \eta/\eta^2$  entonces

$$\frac{I + \eta^2}{\eta^2} = \eta/\eta^2.$$

De aquí tenemos que  $I + \eta^2 = \eta$ , el Lema de Nakayama nos indica que  $I = \eta$ . Por definición esto significa que  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  es una secuencia regular de parámetros.

Para el retorno supondremos que  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \eta$  es una secuencia regular de parámetros. Entonces por definición  $\dim(R) = n$ .

Notemos también que

$$\dim(\eta/\eta^2) \leq n,$$

pues  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  generan  $\eta/\eta^2$ . Si  $\dim(\eta/\eta^2) < n$  y

$$\eta/\eta^2 = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \rangle$$

con  $m < n$ , usando el Lema de Nakayama (de la misma forma que se uso líneas atrás) tenemos que  $\eta = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ . Esto significaría usando el P.I.T que  $ht(\eta) \leq m < n$ , lo cual es una contradicción y prueba el Lema. ■

**Definición 1.13.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. La colección  $(x_1, \dots, x_n)$  se denomina **secuencia regular** (o **secuencia  $R$ -regular**) si sólo si la aplicación

$$\bar{x}_i : R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle \longrightarrow R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$$

definida por  $\bar{a} \mapsto \bar{x}_i \cdot \bar{a}$  es inyectiva para todo  $i = 1, \dots, n$ , y además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq R$ .

**Corolario 1.14.** Si  $x_1, \dots, x_n$  es un secuencia regular de parámetros en un anillo regular local entonces  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular.

**Prueba.** Basta recordar que todo anillo regular local es un dominio y que  $R/I$  es regular local si sólo si  $I$  es parte de una secuencia regular de parámetros. ■

**Nota.** Del hecho que  $\text{Divcero}(R) = \bigcup_i P_i$  donde  $P_i$  son los primos asociados; se prueba que la definición anterior significa que  $\bar{x}_i$  no se encuentra en ningún primo asociado del anillo  $R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ . En general un primo asociado no es un primo minimal.

**Definición 1.15.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. Definamos la **filtración I-ádica** como la cadena

$$R = I^0 \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots,$$

y su anillo graduado como

$$gr^I(R) = \frac{I^n}{I^{n+1}}.$$

Para una definición más general ver [Mats.,10.c].

**Observación.** El anillo graduado definido anteriormente caracteriza las secuencias regulares de la siguiente manera :

**Teorema 1.16.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local y  $a_1, \dots, a_s$  elementos en  $\eta$ . Definamos  $J = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ . Entonces  $a_1, \dots, a_s$  es una secuencia regular si y sólo si

$$(R/J)[x_1, \dots, x_s] \simeq gr^J(R).$$

**Prueba.** [Mats, Teorema 33]. ■

**Definición 1.17.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo,  $I$  un ideal. La longitud de la máxima cadenas de secuencias regulares de  $R$  contenidas en  $I$  se define como *profundidad*( $I$ ). Si  $I = \eta$  entonces *profundidad*( $I$ ) se denomina **profundidad** del anillo  $R$  y se escribe como *profundidad*( $R$ ).

**Observación.** Se prueba que toda cadena maximal tiene la misma longitud. Si en la Definición 1.13 en lugar de  $R$  tomamos cualquier  $R$ -módulo  $M$ , la secuencia  $\{x_1, \dots, x_n\}$  se denomina  $M$ -regular. La máxima longitud de cadena de secuencias  $M$ -regulares contenidas en  $I$  se denomina **profundidad de  $M$  en  $I$**  y se denota como *depht*( $I, M$ ) (ver [Eis,Cap. 17,18]). Si  $M = R$  tenemos que *profundidad*( $I, R$ ) = *profundidad*( $I$ ).

**Observación.** Notemos que bajo esta definición tenemos que

$$profundidad(R) = profundidad(\eta)$$

**Proposición 1.18.** Sea  $R$  un anillo,  $I$  un ideal. Entonces

$$profundidad(I) \leq ht(I)$$

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $n$  la profundidad del ideal  $I$ . Si  $n = 0$ , entonces  $0 \leq ht(I)$ . Supongamos que la afirmación se satisface para  $n$ . Si  $profundidad(I) = n + 1$  entonces existe  $x_1, \dots, x_{n+1}$  una secuencia regular. En el anillo  $R/(x_1)$ , por inducción se cumple la desigualdad

$$profundidad(\bar{I}) \leq ht(\bar{I}) < ht(I).$$

Notemos que  $profundidad(\bar{I}) = n$ , y como  $x_1$  no pertenece a ninguna primo minimal,  $ht(\bar{I}) < ht(I)$ . De aquí se sigue que

$$profundidad(I) \leq ht(I)$$

■.

**Ejemplo 1.19.** En el anillo  $R = (k[x, y]/\langle x^2, xy \rangle)_{\langle x, y \rangle}$ , el ideal  $I = \langle \bar{y} \rangle$  cumple

$$profundidad(I) = 0 < 1 = ht(I).$$

**Lema 1.20.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local entonces

$$profundidad(R) \leq dim(R/P)$$

para todo  $P \in Ass(R)$ .

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $prof(R)$ . Si  $prof(R) = 0$  no haya nada que probar. Supongamos que  $profundidad(R) = r$  y que el lema se cumple para anillos con profundidad menor que  $r$ .

Sea  $P \in Ass(R)$  y  $x$  un elementos regular entonces  $x \notin P$ . Sea  $R_1 = R/\langle x \rangle$  entonces se prueba que existe  $Q_1 \in Ass(R_1)$  tal que  $\bar{P} \subseteq Q_1$ . Es decir  $\langle P, x \rangle \subseteq Q_1^c$ . Notemos que  $P$  es un subconjunto propio de  $Q_1^c$ .

Por inducción tenemos

$$depth(R) - 1 = depth(R_1) \leq dim(R_1/Q_1) < dim(R/P).$$

De aquí podemos concluir que

$$depth(R) \leq dim(R/P)$$

para todo  $P \in Ass(R)$ . ■

**Lema 1.21.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo regular local  $I$  un ideal de  $R$  e  $y \in \eta$ . Entonces

$$profundidad(\langle I, y \rangle) \leq profundidad(I) + 1.$$

**Prueba.** Supongamos que  $\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) = r$ , entonces  $y$  es un elemento regular, y este se puede completar a una secuencia  $y_1 = y, \dots, y_r$  en  $\langle I, y \rangle$ . Notemos que  $y_i = x_i + w_i$ , donde  $x_i \in I$  y  $w_i \in \langle y \rangle$ . La secuencia  $y_1, x_2, \dots, x_r$  es una secuencia regular. El lema de Nakayama nos indica que  $x_2, \dots, x_r, y_1$  es una secuencia regular. Esto significa que

$$\text{profundidad}(I) \geq r - 1,$$

esto finaliza la prueba. ■

**Definición 1.22.** Un anillo local  $(R, \eta)$  es llamado Cohen Macaulay (C.M) si sólo sí  $\text{profundidad}(R) = \dim(R)$  (ver [Mats, 16.A, Pág 103]).

**Lema 1.23.** Sea  $(R, \eta)$  un anillos C.M. y  $P$  un primo asociado entonces  $P$  es minimal. Es decir  $ht(P) = 0$ .

**Prueba.** Sea  $n = \dim(R) = \text{depth}(R)$ . De la desigualdad  $\text{prof}(R) \leq \dim(R/P)$  para todo primo  $P \in \text{Ass}(R)$  podemos concluir que  $\dim(R/P) = n$ , estos significa que  $ht(P) = 0$  para todo primo  $P \in \text{Ass}(R)$ . ■

**Proposición 1.24.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo regular local. Entonces  $(R, \eta)$  es Cohen-Macaulay.

**Prueba.** Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una secuencia regular de parámetros. Del Corolario 1.14 tenemos que  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular. Esto significa, a partir de la definición, que

$$\text{profundidad}(R) \geq n.$$

Si usamos la Proposición 1.18 tenemos que

$$\text{profundidad}(\eta) \leq ht(\eta) = \dim(R) = n.$$

Por lo tanto  $\dim(R) = \text{profundidad}(R)$ . ■

**Observación.** Un hecho importante que se obtiene del último teorema es el que para todo ideal  $I$  de un anillo regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f) se cumple

$$ht(I) = \text{profundidad}(I).$$

Esta propiedad se presenta a continuación :

**Teorema 1.25.** *Sea  $R$  un anillo C.M. Si  $I \subset R$  es un ideal propio, entonces  $\text{profundidad}(I) = \text{ht}(I)$ .*

**Prueba.** De la Proposición 1.18 tenemos  $\text{profundidad}(I) \leq \text{ht}(I)$ . Veamos que  $\text{ht}(I) \leq \text{profundidad}(I)$  se cumpla. Si  $\text{profundidad}(I) = r$  entonces existen  $x_1, \dots, x_r$  una secuencia regular en  $I$ . Se prueba que  $R/\langle x_1, \dots, x_r \rangle$  es C.M. Todos los elementos de  $\bar{I}$  son divisores de cero. Entonces existe un primo  $Q \in \text{Ass}(R/\langle x_1, \dots, x_r \rangle)$  tal que  $\bar{I} \subseteq Q$ . Como  $I \subseteq Q^c$  es un primo minimal de  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$  en  $R$  entonces  $\text{ht}(I) \leq \text{ht}(Q^c) \leq r$  ■

Para anillos r.l.e.t.f se tiene la siguiente versión :

**Teorema 1.26.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $I \subset R$  es un ideal propio, entonces*

$$\text{profundidad}(I) = \text{ht}(I).$$

**Prueba.** Si  $R$  es un anillo r.l.e.t.f entonces, de la Proposición 1.24,  $R$  es C.M. La proposición anterior finaliza la prueba. ■

**Corolario 1.27.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $y \in \eta$ . Entonces*

$$\text{ht}(\langle I, y \rangle) \leq \text{ht}(I) + 1.$$

**Prueba.** Del Lema 1.21 obtenemos

$$\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) \leq \text{profundidad}(I) + 1. \quad (1.1)$$

Por otro lado del Teorema anterior se sigue que  $\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) = \text{ht}(\langle I, y \rangle)$  y  $\text{profundidad}(I) = \text{ht}(I)$ . Entonces de 1.1 se sigue

$$\text{ht}(\langle I, y \rangle) \leq \text{ht}(I) + 1. \quad \blacksquare$$

**Proposición 1.28.** *Sea  $R$  un anillo noetheriano y  $M$  un módulo finito. Entonces  $\text{Ass}(M)$  es un conjunto finito.*

**Prueba.** [Mats, Proposición 7.G]. ■

**Definición 1.29.** Sea  $R$  un anillo e  $I$  un ideal. Sea  $\text{Ass}(R/I) = \{P_1, \dots, P_s\}$ . Diremos que  $I$  es **Unmixed** si  $\text{ht}(P_i) = \text{ht}(I)$  para todo  $i$ .

**Proposición 1.30.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local de dimensión  $m$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- 1)  $(R, \eta)$  es Cohen Macaulay, es decir,  $\text{profundidad}(R) = m$ .
- 2) Si  $J = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$  es un ideal de altura  $r$  generado por  $r$  elementos entonces  $J^v$  es unmixed para todo entero  $v$ .
- 3) Si  $a_1, \dots, a_r$  y  $J$  cumplen las hipótesis de (2) entonces

$$\text{gr}_J(R) \simeq (R/J)[x_1, \dots, x_r]$$

- 4) Existe un sistema de parámetros  $a_1, \dots, a_n$  tal que

$$\text{gr}_I(R) \simeq (R/I)[x_1, \dots, x_n],$$

donde  $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

*Nota.* En 3 y 4 los isomorfismos son naturales. Ellos son definidos como  $a_i \text{ mod } J^2 \mapsto x_i$ .

**Prueba.** [Mats, Teorema 32]. ■

**Corolario 1.31.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal generado por una secuencia regular entonces

$$\frac{I^s}{I^{s+1}} \simeq ((R/I)[x_1, \dots, x_r])^s,$$

donde  $((R/I)[x_1, \dots, x_r])^s$  representa en  $R/I$ -módulo de los polinomios de grado  $s$  con coeficientes en  $R/I$ .

**Prueba.** Como  $f_1, \dots, f_r$  forman una secuencia regular entonces  $ht(I) = r$ . De la Proposición 1.30 tenemos que

$$\text{gr}^I(R) \simeq R/I[x_1, \dots, x_r].$$

Donde el isomorfismo es definido como  $\bar{f}_i \mapsto x_i$ . Denotemos a este isomorfismo como  $\varphi$ . Un elemento generador de  $I^s$  es de la forma  $z = \alpha f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$ , donde  $a_1 + \dots + a_r = s$ , y  $\alpha \in R$ . De la definición del isomorfismo  $\varphi$  obtenemos  $\varphi(\bar{z}) = \bar{\alpha} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}$ . De aquí se prueba que el  $R/I$ -módulo  $\frac{I^s}{I^{s+1}}$  representan los polinomios de grado  $s$  sobre  $R/I$ . ■

## 1.2. El Ideal Jacobiano.

La definición que presentaremos del ideal jacobiano será sólo para anillos regulares locales. Esta se basó en el hecho que  $\Omega_R^1$  es libre.

**Definición 1.32.** Sea  $R$  un anillo r.l.e.t.f. Sea  $F = (f_1, \dots, f_r)$  con  $r \geq 1$  tal que  $ht(I) = c$  e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Sea  $e_1, \dots, e_m$  una base de  $\Omega_R^1$  donde  $m = \dim(R)$ . Definamos **la matriz jacobiana de  $F$**  en la base  $e_1, \dots, e_m$  como  $Jac(F) = (f_{i,j})$ , donde  $df_j = \sum_{i=1}^m f_{i,j} e_i$ . Por definición **el ideal jacobiano**  $J_F(e_1, \dots, e_m)$  es el ideal generado por los menores  $c \times c$  de  $Jac(F) = (f_{i,j})$ .

**Observación.** La definición de ideal jacobiano  $J_F$  que presentamos depende de los generadores y del número de estos en el ideal  $I$ . Para probar esta afirmación basta ver el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.33.** Sea  $(R; \eta) = k[x, y]_{(x,y)}$  e  $I = \langle f = x^2 + y^2, g = x^2 - y^2 \rangle$ , es claro que  $I$  representa una icis. Un cálculo nos hace ver  $J_{f,g} = \langle xy \rangle$ . Los polinomios  $f' = (1 + xy)(x^2 + y^2)$  y  $g' = y^2$  generan el ideal  $I$ . De la definición de ideal jacobiano tenemos que  $J_{f',g'} = \langle y^2 x^2 + y^4 + 2xy + 2x^2 y^2 \rangle$ .

Por otro lado si  $h = (1 - xy)x^2$ , es claro que  $I = \langle f, g, h \rangle$  y un cálculo nos lleva a que  $J_{f,g,h} = \langle xy, x^4 + y^4, x^4 - y^4 \rangle$ , aquí estamos tomando todos los menores de orden  $2 \times 2$  de la matriz jacobiana de  $F = (f, g, h)$ . Es claro que  $ht(J_{f,g,h}) = m = 2$ .

**Observación.** Notemos también que en la definición del ideal jacobiano hacemos uso de una base del módulo  $\Omega_R^1$ . De aquí la razón de denotar el ideal jacobiano de  $F = (f_1, \dots, f_r)$  como  $J_F(e_1, \dots, e_m)$ . Aquí si veremos que si cambiamos la base del módulo libre  $\Omega_R^1$  el ideal jacobiano sigue siendo el mismo. La prueba de esta afirmación sigue a continuación. Para iniciar presentamos algunos propiedades conocidas.

**Lema 1.34.** Sean  $A_{s \times m}$ ,  $B_{m \times s}$  y  $C_{s \times s}$  matrices con entradas en un anillo  $R$  con  $s \leq m$ . Si

$$A \cdot B = C$$

entonces  $\det(C)$  es combinación lineal de menores  $s \times s$  de la matriz  $A$ . Si  $s > m$  entonces  $\det(C) = 0$ .

**Prueba.** Sean  $C = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_s)$ , y  $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_m)$ , donde  $A_i, C_j$  representan los vectores columnas de  $A$  y  $C$  respectivamente.

De la hipótesis  $C = A \cdot B$  se prueba que  $C_k = \sum_{i_k=1}^m b_{i_k,k} A_{i_k}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det(C_1 \ C_2 \ \dots \ C_s) = \\ \det\left(\sum_{i=1}^m b_{i,1} A_{i_1} \ \dots \ \sum_{i=1}^m b_{i,k} A_{i_k} \ \dots \ \sum_{i=1}^m b_{i,s} A_{i_s}\right) &= \\ \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^m b_{i_1,1} b_{i_2,2} \dots b_{i_s,s} \cdot \det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s}). \end{aligned}$$

Si  $s > m$  entonces en la ecuación

$$\det(C) = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^m b_{i_1,1} b_{i_2,2} \dots b_{i_s,s} \cdot \det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s})$$

alguna columna  $A_{i_k}$  se repite en  $(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s})$ . Es decir

$$\det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s}) = 0.$$

Por lo tanto  $\det(C) = 0$ . ■

**Corolario 1.35.** Sean  $A, B$ , y  $C$  matrices de orden  $m \times n$ ,  $n \times s$  y  $m \times s$  respectivamente y  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \leq m$ ,  $c \leq s$ . Si

$$A \cdot B = C$$

entonces todo menor  $C_1$  de orden  $c$  de  $C$  es combinación lineal de menores de orden  $c$  de  $B$ .

**Prueba.** Sea  $C_1 = (c_{i_j, i_k})$  una submatriz de orden  $c$  de  $C$ . Entonces existen  $A_1 = (a_{i_j, l})$  y  $B_1 = (b_{t, i_k})$  matrices de orden  $c \times n$  y  $n \times c$  respectivamente tal que  $A_1 \cdot B_1 = C_1$ , entonces

$$B_1^t \cdot A_1^t = C_1^t,$$

Una aplicación directa del Lema anterior finaliza la prueba. Notemos que aún en el caso  $c > n$  se cumple el corolario. En efecto, si  $c > n$  entonces del lema anterior tenemos que  $\det(C_1) = 0$ . ■

**Observación.** Notemos que para  $n$  puede suceder que  $n \geq m$  o  $n < m$  y lo mismo para  $s$ . Este comentario tiene su asidero en el Corolario 1.37 y Proposición 1.38

**Corolario 1.36.** Sea  $A$  una matriz  $m \times m$  invertible,  $B, C$  matrices de orden  $m \times n$  y  $c$  en los naturales tal que  $c \leq m$  y  $c \leq n$ . Si

$$A \cdot B = C$$

entonces el ideal  $\mathcal{C}$  generado por los menores de orden  $c$  de la matriz  $C$  es igual al ideal  $\mathcal{B}$  generado por los menores de orden  $c$  de la matriz  $B$ .

**Prueba.** Del Corolario anterior tenemos que todo menor de orden  $c$  de la matriz  $C$  se escribe como combinación lineal de menores de orden  $c$  de la matriz  $B$  por lo tanto  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ . Como  $A$  es invertible de igual forma se prueba que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ . ■

A continiación veremos que el ideal jacobiano no depende de la base del módulo  $\Omega_R^1$  que se elija.

**Corolario 1.37.** La definición del ideal jacobiano de  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  no depende de la base de  $\Omega_R^1$  que se tome. Es decir, si  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  es otra base del módulo  $\Omega_R^1$  donde la matriz  $Jac(F) = (f'_{i,j})$ , entonces  $J_F = J'_F$ , donde  $J'_F$  es el ideal generados por los menores de orden  $c$  de la matriz  $(f'_{i,j})$ .

**Prueba.** Sea  $A : \Omega^1 \rightarrow \Omega^1$  la matriz de cambio de la base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  a la base  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ , es decir  $A \cdot e_i = e'_i$ . Notemos que  $A$  es invertible pues si definimos  $A' : \Omega_R^1 \rightarrow \Omega_R^1$  como  $A'(e'_i) = e_i$  tenemos que  $A \cdot A' = Id$ , y  $A' \cdot A = Id$ .

Por otro lado si

$$A(e_j) = e'_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j} e_i$$

entonces

$$\begin{aligned} df_j &= \sum_{i=1}^m f'_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^m f'_{i,j} \left( \sum_{k=1}^m a_{k,i} e_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^m a_{k,i} f'_{i,j} \right) e_k = \sum_{k=1}^m f_{k,j} e_k. \end{aligned}$$

En lenguaje matricial esto significa tener la siguiente igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} f'_{1,1} & f'_{1,2} & \cdots & f'_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{m,1} & f'_{m,2} & \cdots & f'_{m,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,1} & \cdots & f_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,r} \end{pmatrix}.$$

Donde  $A = (a_{i,j})$  es invertible y  $A(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j}e_i$ . El Corolario 1.36 con  $n = r$  prueba que

$$J_F(e_1, \dots, e_m) = J_F(e'_1, \dots, e'_m).$$

Notemos que no existe restricción sobre el número  $r$  con respecto a  $m$ . Es decir puede suceder que  $r$  sea **igual, mayor o menor** que  $m = \dim(R)$  (ver Corolario 1.35). ■

**Observación.** A continuación veremos que la definición del ideal jacobiano no depende del número de generadores ni de los generadores del ideal  $I$ . En un primer momento demostramos lo siguiente :

**Proposición 1.38.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  tal que  $ht(I) = c$ . Si  $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  entonces se cumple*

$$J_F = J_G$$

en el anillo  $R/I$ , donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$  y  $G = (g_1, \dots, g_s)$ .

**Prueba.** Como  $f_j \in I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  para todo  $j = 1, \dots, r$  entonces

$$f_j = \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} g_i.$$

Si aplicamos la derivada universal  $d : R \rightarrow \Omega_R^1$  obtenemos

$$df_j = \sum_{i=1}^s (\lambda_{i,j} dg_i + g_i d(\lambda_{i,j})).$$

La igualdad anterior en el módulo  $\Omega_R^1 \otimes_R R/I$  se escribe como

$$df_j = \sum_{i=1}^s \bar{\lambda}_{i,j} \bar{d}g_i \tag{1.2}$$

De ahora en adelante trabajaremos en el anillo  $R/I$ , y obviaremos la notación de clase de equivalencia. Tenemos que

$$df_j = \sum_{k=1}^m f_{kj} e_k$$

y

$$dg_j = \sum_{k=1}^m g_{kj} e_k,$$

entonces la ecuación 1.2 se escribe como

$$\sum_{k=1}^m f_{kj} e_k = \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} \left( \sum_{k=1}^m g_{k,i} e_k \right) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} g_{k,i} \right) e_k.$$

Por lo tanto  $f_{k,j} = \sum_{i=1}^s g_{k,i} \lambda_{i,j}$ , es decir

$$Jac(F) = Jac(G) \cdot \Lambda,$$

donde  $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ . Del Corolario 1.35 se sigue que los menores de orden  $c$  de  $Jac(F)$  son combinación lineal de menores de  $Jac(G)$  de orden  $c$ , es decir  $J_F \subseteq J_G$ . De la misma manera se prueba que  $J_G \subseteq J_F$ .

Notemos que no existe restricción sobre los número de generadores  $r$  y  $s$  del ideal  $I$ . Es decir puede suceder que  $r \geq m$  o  $r < m$ , lo mismo para  $s$ . ■

**Corolario 1.39.** Sean  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ , el ideal  $\langle I, J_F \rangle$  no depende de los representantes de  $I$ .

**Prueba.** De la proposición anterior tenemos que para generadores  $f_1, \dots, f_r$  y  $g_1, \dots, g_t$  se cumple  $J_F = J_G$  en el anillo  $R/I$ . Esto significa que

$$\langle J_F, I \rangle = \langle J_G, I \rangle.$$

■  
**Observación.** A continuación vamos a probar que los elementos  $dx_i$  forman una base de  $\Omega_R^1$  si  $\{x_1, \dots, x_m\}$  forman una secuencia regular de parámetros de  $R$ .

**Proposición 1.40.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $x_1, \dots, x_m$  un sistema regular de parámetros. Entonces  $dx_1, \dots, dx_m$  es una base de  $\Omega_R^1$ .

**Prueba.** Para el epimorfismo de anillos

$$R \longrightarrow R/\eta = k,$$

de la secuencia conormal (ver Proposición 16.3 [Eis]), tenemos la secuencia exacta

$$\frac{\eta}{\eta^2} \xrightarrow{d} \Omega_R^1 \otimes R/\eta \longrightarrow \Omega_{k|k}^1 \longrightarrow 0,$$

donde  $\Omega_R^1 \otimes R/\eta$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $m$ . Como  $\Omega_{k|k}^1 = 0$  y  $\frac{\eta}{\eta^2} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$  es  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $m$  entonces  $d$  es un isomorfismo de e.v. Es decir, los elementos  $dx_i \otimes 1$  generan  $\Omega_R^1 \otimes R/\eta$ .

Sea  $N = \langle dx_1, \dots, dx_m \rangle_R$  y  $M = \Omega_R^1$  entonces  $N \otimes R/\eta = M \otimes R/\eta$ . Por lo tanto

$$\frac{M}{N} \otimes R/\eta = \frac{M \otimes R/\eta}{N \otimes R/\eta} = 0.$$

Como

$$\frac{M/N}{\eta \cdot M/N} = \frac{M}{N} \otimes R/\eta,$$

entonces  $M/N = \eta(M/N)$ . El lema de Nakayama (ver Corolario 4.8 [Eis]) nos indica que  $M/N = 0$ , es decir  $M = N$ . Por lo tanto  $dx_1, \dots, dx_m$  generan  $\Omega_R^1$ . El morfismo  $T : \bigoplus_{i=1}^m Re_i \rightarrow \Omega_R^1$  definido como  $T(\sum a_i e_i) = \sum a_i dx_i$  es un epimorfismo. Si  $P$  su núcleo, la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^m Re_i \xrightarrow{T} \Omega_R^1 \longrightarrow 0,$$

Como  $\Omega_R^1$  es libre de igual rango que  $\bigoplus_{i=1}^m Re_i$ , se prueba que  $P = 0$ . ■

**Proposición 1.41.** Sean  $S \subset T$  cuerpos de característica cero y  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset T$  una colección de elementos. Entonces  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de  $\Omega_{T|S}^1$  como un espacio vectorial sobre  $T$  si sólo si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de trascendencia de  $T$  sobre  $S$ .

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.14]. ■

**Definición 1.42.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $f \in \eta$ . Diremos que  $f$  es regular si  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local.

**Lema 1.43.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $f \in \eta$  es regular si y sólo si  $J_f = \langle 1 \rangle$ .

**Prueba.** Sea  $m = \dim(R)$ . Notemos que  $R/\langle f \rangle$  es esencialmente de tipo finito. Por definición  $f$  es un elemento regular si  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local. Por lo tanto el elemento  $f$  es parte de una secuencia regular de parámetros  $x_1 := f, \dots, x_n$ . De la proposición anterior tenemos que  $dx_1, \dots, dx_n$  es una base de  $\Omega_R^1$ . Por lo tanto en esta base  $J_f = R$ .

Por otro lado si  $J_f = R$  entonces  $f \in \eta \setminus \eta^2$ . En efecto si  $f \in \eta^2$  entonces  $f = \sum_{i=1}^t x_i y_i$  donde  $x_i, y_i \in \eta$ . Si aplicamos la derivada universal tenemos  $df = \sum_{i=1}^t (dx_i y_i + x_i dy_i)$ . Como  $x_i, y_i \in \eta$  entonces se prueba que  $J_f \in \eta$ . Por lo tanto  $f \in \eta \setminus \eta^2$ . Esto significa que  $\bar{f} \in \frac{\eta}{\eta^2}$  es no nulo. Entonces  $\bar{f}$  es parte de una base del espacio vectorial  $\frac{\eta}{\eta^2}$ . Sean  $v_1 := \bar{f}, v_2 := \bar{f}_2, \dots, v_m := \bar{f}_m$  una base de  $\frac{\eta}{\eta^2}$ . Sean  $f, f_2, \dots, f_m$  representantes de las clases  $v_1, \dots, v_m$  e  $I := \langle f, f_2, \dots, f_m \rangle$ . Como  $\bar{I} := \frac{I+\eta^2}{\eta^2} = \frac{\eta}{\eta^2}$ , entonces  $I + \eta^2 = \eta$ . Es decir en el anillo  $R/I$  tenemos  $\bar{\eta} = \bar{\eta}^2$ . Una aplicación del Lema de Nakayama prueba que  $I = \eta$ . Es decir  $f, f_2, \dots, f_m$  es un sistema regular de parámetros. De aquí tenemos que  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local. ■

# Capítulo 2

## Singularidades

En este capítulo presentamos las propiedades que tiene el ideal jacobiano de una singularidad aislada. En el caso de hipersuperficies es conocido que  $ht(J_f) = m$ . Esta propiedad caracteriza las singularidades de una hipersuperficie. Si el ideal es de tipo intersección completa se tiene  $ht(J_F) = m - r + 1$ . Estos resultados nos permiten estudiar las icis usando la cohomología de ciertos complejos  $L_j$  para  $I = \langle f, g \rangle$ .

### 2.1. Singularidades Aisladas.

Nuestro objetivo será presentar propiedades técnicas de las *singularidades aisladas*. Específicamente calculamos la altura del ideal jacobiano de los generadores de un ideal  $I$  de *intersección completa* con una *singularidad aislada*. También demostramos que toda singularidad aislada de tipo intersección completa se puede generar con singularidades aisladas de hipersuperficies.

**Definición 2.1.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f., e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  y  $F = (f_1, \dots, f_r)$ . Diremos que el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset \eta$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si

$$ht(\langle I, J_F \rangle) = m = \dim\left(\frac{\eta}{\eta^2}\right),$$

donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$ .

**Observación.** La definición anterior nace de la siguiente situación : Sea  $R = k[x_1, \dots, x_m]_\eta$ , e  $I$  un ideal propio de  $R$ . La condición impuesta en la

definición anterior significa que la única componente irreducible que pasa por el punto  $P$  -que representa el maximal  $\eta$ - de los ceros del ideal  $\langle J_f + I \rangle$ ,  $Z(J_f + I)$ , es el punto  $P$ . Si  $p \in C \subset Z(J_f + I)$  y  $C$  es una componente irreducible, entonces  $C = P$ . En lenguaje algebraico la afirmación anterior se escribe de la siguiente manera: Sean  $\eta$  y  $\mathcal{P}_C$  un ideal maximal y primo respectivamente (que representa el punto  $P$  y la componente irreducible  $C$ ). Si  $\eta \supset \mathcal{P}_C \supset \langle J_f, I \rangle$  entonces  $\mathcal{P}_C = \eta$ .

Observemos que la singularidad de  $I$  es aislada si  $\sqrt{\langle I, J_f \rangle} = \eta$ .

**Lema 2.2.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Entonces  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset \eta$  es un ideal con una singularidad aislada en  $\eta$  si y sólo si  $\eta^i \subset \langle I, J_f \rangle$  para algún  $i$ .*

**Prueba.** Se sigue de la definición.

**Lema 2.3.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. El ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una icis si sólo si para todo primo  $P$  diferente del maximal el anillo  $(R/I)_P$  es el un anillo regular local.*

**Prueba.** Será suficiente demostrar que en el anillo  $R_P$  la secuencia  $f_1, \dots, f_r$  es parte de una secuencia regular de parámetros. Esto último es claro pues los elementos  $df_1, \dots, df_r$  tienen como ideal jacobiano la unidad. ■

**Observación.** Cuando el anillo  $R$  es r.l.e.t.f. se tiene una propiedad importante : Para todo ideal propio  $I$  de  $R$  se cumple  $ht(I) = profundidad(I)$  (ver Teorema 1.26). Esta propiedad se debe al hecho que un anillo r.l.e.t.f. es Cohen Macaulay (ver Proposición 1.25). Por ello en adelante no distinguiremos las dos definiciones altura y profundidad de un ideal; teniendo en cuenta -claro está- que el anillo donde se hace esta identificación sea Cohen Macaulay.

Cuando el ideal  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada y es generado por un sólo polinomio tenemos la siguiente caracterización (en el caso particular que  $k$  sea el cuerpo de los números complejos obtenemos la Proposición 1.2 de [Looj]).

**Proposición 2.4.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f e  $I = \langle f \rangle \subset \eta$  un ideal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $\langle f, J_f \rangle \supset \eta^j$  para algún  $j$ .
2.  $J_f \supset \eta^j$  para algún  $j$ .
3.  $dim_k(\frac{R}{J_f}) < \infty$ .

4.  $\dim_k\left(\frac{R}{\langle J_f, f \rangle}\right) < \infty$ .

**Observación.** Las dimensiones de  $R/J_f$  y  $R/\langle J_f, f \rangle$  -en las equivalencias 3 y 4- se llaman **Número de Milnor y Tjurina** respectivamente

**Prueba.** La equivalencia de 1 y 2 se debe a que  $f \in \sqrt{J_f}$  ([HS, Corolario 2.2].)

Para demostrar que 2 implica 3, si usamos el epimorfismo

$$R/\eta^j \longrightarrow R/J_f,$$

(que proviene de la hipótesis  $J_f \supset \eta^j$ ), será suficiente notar que  $R/\eta^j$  es un espacio vectorial de dimensión finita.

Sea  $R/J_f$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Del epimorfismo

$$R/J_f \longrightarrow R/\langle J_f, f \rangle$$

se sigue que  $R/\langle J_f, f \rangle$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Es decir, 3 implica 4.

Finalmente para demostrar que 4 implica 1 usaremos el hecho que si  $M$  es un  $R$ -módulo de  $k$ -dimensión finita, entonces existe  $j$  en los naturales tal que  $\eta^j \cdot M = 0$ . En el caso que  $M = R/\langle J_f, f \rangle$  esto significa que existe algún  $j$  tal que  $\eta^j \subset \langle J_f, f \rangle$ . ■

**Corolario 2.5.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. El ideal  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si sólo si  $ht(J_f) = ht(\langle J_f, f \rangle) = m = \dim(R)$ .

**Prueba.** Del Lema 2.2, las equivalencias 1 y 2 de la Proposición anterior y la aplicación directa de la definición de altura de un ideal obtenemos que  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si sólo si  $ht(J_f) = ht(\langle J_f, f \rangle) = m = \dim(R)$ . ■

**Corolario 2.6.** Si  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada entonces el complejo de Koszul  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  cumple  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i < m$ , y  $H^m(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) \neq 0$ .

**Prueba.** Del Corolario anterior se tiene que  $profundidad(J_f) = m$ . Esto significa que  $J_f$  contiene a alguna secuencia regular de longitud  $m$ . Como  $J_f = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_m} \rangle$  donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} e_i$ , el Corolario 17.7 de [Eis] nos dice que los elementos  $f_{x_1}, \dots, f_{x_r}$  forman una secuencia regular. ■

La propiedad del corolario anterior sólo se cumple en el caso local (ver Ejemplo 2.7).

Veamos el siguiente ejemplo de Michler :

**Ejemplo 2.7.** El polinomio  $f = \frac{(c+x)^2 y^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  en  $(k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$ , donde  $c$  es un elemento no nulo del cuerpo, tiene una singularidad aislada en el origen. Sus derivadas parciales  $\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\} = \{(c+x)(x+y^2), (c+x)^2 y\}$ , no forman una secuencia regular en  $k[x, y]$ , [Mich, Ejemplo 2]. Sin embargo, en el anillo local  $(k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$  si es una secuencia regular.

Interesados en el caso cuando el ideal  $I$  este generado por una secuencia regular, daremos la siguiente definición.

**Definición 2.8.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $f_1, \dots, f_r$  forman una secuencia regular entonces diremos que el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es **intersección completa**.

**Definición 2.9.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si el ideal  $I$  es una intersección completa y tiene una singularidad aislada en  $\eta$ , diremos que  $I$  tiene una singularidad aislada de intersección completa (**icis**, por sus siglas en inglés).

**Observación.** Cuando el ideal  $I$  es generado por una secuencia regular  $f_1, \dots, f_r$  se cumple  $ht(I) = r$ . Entonces el ideal jacobiano  $J_F$  está generado por los menores  $M$  de orden  $r \times r$  de la matriz jacobiana  $Jac(F) = (f_{i,j})$ , donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$ . En adelante trataremos solamente con icis, y cuando escribamos  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  suponemos que  $ht(I) = r$  y que por lo tanto  $f_1, \dots, f_r$  es una secuencia regular.

**Ejemplo 2.10.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$  e  $I = \langle x^2, y^3 \rangle$ . Como el ideal  $\langle J_{f,g}, f, g \rangle$  contiene una potencia de  $\eta$  entonces  $I$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún, como  $\{x^2, y^3\}$  es una secuencia regular, entonces  $I$  es una icis.

**Observación.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  se cumple que  $ht(J_f) = m$  por Corolario 2.5. Esta propiedad permite expresar los módulos de cohomología de ciertos complejos  $L_j$  de manera simple. Esta es la razón de nuestro interés en esta sección de calcular la altura del ideal  $J_F$  cuando  $F$  tiene una singularidad aislada de intersección completa. En el siguiente ejemplo mostramos que la propiedad  $ht(J_F) = m$ ,

que se cumple para un polinomio ( $F = f$ ) ya no se satisface para el caso en que el ideal  $I$  este generado por más de un polinomio.

**Observación.** En adelante sólo trataremos con icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  donde **ninguno de sus generadores es regular.**

En el siguiente ejemplo también tenemos que  $ht(J_F) < m$ , y no se puede eliminar ninguno de los generadores pues no son regulares.

**Ejemplo 2.11.** Sea  $I = \langle x^2, y^3 \rangle$ , entonces el ideal jacobiano  $J_F = \langle xy^2 \rangle$  cumple  $ht(J_F) = 1 < 2$ . El ideal  $I$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún tenemos que  $I = \langle f - g, f + g \rangle$ . Estos nuevos generadores de  $I$ , cada uno de ellos, tiene una singularidad aislada en  $\eta = \langle x, y \rangle$ ; sin embargo  $ht(J_{F'}) = ht(J_F) < 2$  donde  $F' = (f - g, f + g)$ .

**Observación.** Cuando el ideal  $I$  es generado por más de un polinomio tenemos  $ht(J_F) < m$ . Esta es la principal obstrucción para seguir el camino trazado en el caso de un polinomio. Para superar esta dificultad calculamos  $ht(J_F)$  (Corolario 2.18). A continuación demostramos tres lemas básicos que nos ayudarán en la demostración del Lema 2.15.

**Lema 2.12.** Sean  $(R, \eta)$  un anillo local,  $z \in R$ , e  $I$  un ideal con  $\langle I, z \rangle \neq R$ . Si existe polinomio  $P(x) \in k[x]$  no nulo tal que  $P(z) \in I$  entonces  $z \in \sqrt{I}$ .

**Prueba.** Sea  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in I$ . Es suficiente notar que  $a_0 = 0$ . ■

**Lema 2.13.** Sean  $J, \langle J, f_1, \dots, f_r \rangle$  ideales propios de  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Sea  $P$  ideal primo con  $J \subset P$ , y  $Q(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  un polinomio no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in J$ . Entonces existen dos posibilidades

- 1)  $f_1$  se encuentra en el ideal  $\langle P, f_2, \dots, f_r \rangle$ , o
- 2) Existe un polinomio  $Q_1(x_2, \dots, x_r) \in k[x_2, \dots, x_r]$  no nulo, tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle P, f_1 \rangle$ .

**Prueba.** Si algún  $f_i \in P$  se cumple la primera afirmación. Veamos el otro caso. Sea  $Q(x_1, \dots, x_r) = \sum_{j=1}^s T_j$  el polinomio no nulo de la hipótesis, donde  $T_j$  son las formas homogéneas de grado  $j$ . Para la prueba del Lema analizaremos dos casos.

Primer caso : Existe algún  $j$  tal que  $x_1$  no divide a  $T_j$ . Entonces  $Q(x_1, \dots, x_r)$  se puede escribir como

$$Q(x_1, \dots, x_r) = Q_1(x_2, \dots, x_r) + x_1 \cdot \alpha(x_1, \dots, x_r), \quad (2.1)$$

donde  $Q_1(x_2, \dots, x_r) = \sum_{j: x_1 \nmid T_j} T_j$  es un polinomio no nulo. De la ecuación (2.1)

y el hecho que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in J$  podemos concluir que

$$Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle J, f_1 \rangle \subset \langle P, f_1 \rangle.$$

El segundo caso sucede si  $x_1$  divide  $T_j$  para todo  $j$ . Entonces

$$Q(x_1, \dots, x_r) = x_1^k \bar{Q}(x_1, \dots, x_r),$$

donde  $\bar{Q}(x_1, \dots, x_r) = \sum \bar{T}_j$ , y existe algún  $\bar{T}_j$  tal que  $x_1 \nmid \bar{T}_j$ . Como  $f_1$  no esta en  $P$  entonces  $\bar{Q}(f_1, \dots, f_r) \in P$ . El primer caso nos dice que existe polinomio  $Q_1(x_2, \dots, x_r)$  no nulo tal que

$$Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle P, f_1 \rangle.$$

■

**Lema 2.14.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal propio,  $r \geq 1$ . Sea  $P$  ideal primo tal que  $ht(\langle P, I \rangle) = m = \dim(R)$ . Si existe un polinomio  $Q(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in P$  entonces  $ht(P) \geq m - r + 1$ .*

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $r \geq 1$ .

Si  $r = 1$  del Lema 2.12 tenemos que  $f_1 \in \sqrt{P} = P$ . Por lo tanto  $\langle P, f_1 \rangle \subset P$ . Esto significa que  $ht(P) = ht(\sqrt{P}) = ht(\langle P, f_1 \rangle) = m$ . Es decir  $ht(P) \geq m$ .

Supongamos que el Lema se cumple para  $r = s$ . Veamos que se satisface para  $r = s + 1$ .

Sea  $r = s + 1$ . Sea  $P$  un ideal primo propio,  $I = \langle f_1, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$  un ideal propio tal que  $ht(P, I) = m$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_s, x_{s+1})$  polinomio no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_s, f_{s+1}) \in P$ . Del Lema 2.13 con  $J = P, r = s + 1$  tenemos dos posibilidades :

$f_1 \in \langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ , o existe  $Q_1(x_2, \dots, x_s, x_{s+1})$  polinomio no nulo tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in \langle P, f_1 \rangle$ .

En el primer caso tenemos que  $\langle P, I \rangle \subset \langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ . De la hipótesis  $ht(\langle P, I \rangle) = m$  tenemos que  $ht(\langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle) = m$ . De la fórmula  $ht(I, a) \leq ht(I) + 1$  se tiene que  $ht(P) + s \geq ht(P, f_2, \dots, f_{s+1}) = m$ . Entonces  $ht(P) \geq m - (s + 1) + 1$ .

En el segundo caso existe un polinomio  $Q_1(x_2, \dots, x_s, x_{s+1})$  no nulo tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in \langle P, f_1 \rangle$ . Sea  $P_1$  ideal primo tal que  $P_1 \supset \langle P, f_1 \rangle$ , y

$ht(P_1) = ht(\langle P, f_1 \rangle)$ . Notemos que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in P_1$ , y  $ht(\langle P_1, I_1 \rangle) = m$ , donde  $I_1 = \langle f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ . Aplicamos el lema para  $r = s$ ,  $I = I_1$ ,  $P = P_1$ ,  $Q = Q_1$  y obtenemos  $ht(P_1) \geq m - s + 1$ . Como  $ht(P_1) = ht(\langle P, f_1 \rangle) \leq ht(P) + 1$  entonces

$$ht(P) \geq m - (s + 1) + 1.$$

Esto finaliza la prueba por inducción y demuestra el Lema. ■

**Lema 2.15.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal con una icis en  $\eta$ . Entonces  $ht(J_F) \geq m - r + 1$ .*

**Prueba.** Sea  $P \supseteq J_F$  un ideal primo.

Si  $f_i \in P$ , para algún  $i = 1, \dots, r$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $f_1 \in P$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_r) = x_1$  polinomio no nulo entonces  $Q(f_1, \dots, f_r) = f_1 \in P$ . Como  $ht(P, I) = m = \dim(R)$ , del Lema 2.14 se tiene que

$$ht(P) \geq m - r + 1.$$

Si  $f_i \notin P$  para todo  $i = 1, \dots, r$  debemos probar que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . Del Corolario 1.41 de [B] tenemos que en  $K = Q(D)$ , el cuerpo de fracciones de  $D = R/P$ , los elementos  $f_1, \dots, f_r$  no forman un conjunto algebraicamente independiente sobre  $k$  -el cuerpo base- ( $f_i$  denota también a la clase  $f_i$  en  $R/P$ ). Es decir, existe un polinomio  $S(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  no nulo tal que  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el cuerpo  $K$ . Como  $D$  es un dominio y  $D \hookrightarrow K$  entonces  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $(D, \eta)$ . Esta última condición significa que  $S(f_1, \dots, f_r) \in P$ . Finalmente, como  $ht(\langle I, J_F \rangle) = m$  y  $P \supset J_F$  se tiene que  $ht(\langle P, I \rangle) = m$ . Del Lema 2.14 se sigue que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . ■

**Ejemplo 2.16.** En este ejemplo mostramos que sin la hipótesis de singularidad aislada el lema anterior no se satisface. Sean  $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ , y  $g = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$  polinomios en el anillo  $(k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ . Como  $\langle f, g, x \rangle$  es un ideal que contiene una potencia del maximal entonces  $\langle f, g \rangle$  forman una secuencia regular. Más aún, cada ideal  $\langle f \rangle$  y  $\langle g \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Sin embargo debido a que  $J_{f, g} \subset \langle z \rangle$  entonces  $ht(J_{f, g}) \leq 1$ . Como  $ht(J_{f, g}) \geq 1$  obtenemos  $ht(J_{f, g}) = 1 < m - r + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ . Por lo tanto  $I = \langle f, g \rangle$  no puede tener una icis, pues de lo contrario contradice al lema.

**Observación.** La desigualdad contraria se presenta en el siguiente Teorema el cual se llama **La generalización del P.I.T de Macaulay**. Aquí usaremos la notación  $I_t(A)$  (según se presenta en [Eis1]) para indicar el ideal generado por los menores  $t \times t$  de una matriz  $A$  de orden  $p \times q$ .

**Teorema 2.17.** *Si  $A$  es una  $p \times q$  matriz con elementos en un anillo noetheriano  $R$  e  $I_t(A) \neq R$  entonces*

$$ht(I_t(A)) \leq (p - t + 1)(q - t + 1)$$

**Prueba.** [Eis1, Teorema A.2.54]. ■

**Corolario 2.18.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Entonces*

$$ht(J_F) = m - r + 1.$$

**Prueba.** Del Lema 2.15 tenemos la siguiente desigualdad

$$ht(J_F) \geq m - r + 1.$$

Por otro lado notemos que

$$J_F = I_r(Jac(F))$$

(según la notación establecida líneas atrás), donde  $Jac(F)$  es una matriz de orden  $m \times r$ . De la generalización del P.I.T de Macaulay tenemos que

$$ht(J_F) \leq (m - r + 1)(r - r + 1) = m - r + 1.$$

De aquí se tiene que  $ht(J_F) = m - r + 1$ . ■

**Observación.** El siguiente Lema será uno de los pilares de la demostración del Corolario 2.22, que es un caso particular del Teorema de *clasificación de singularidades aisladas*.

**Lema 2.19.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Definamos  $h_\alpha := f + \alpha \cdot g$  y  $J_\alpha := J_{h_\alpha}$  para  $\alpha \in k$ . Si  $ht(J_\alpha) = m - 1$ , entonces existe un primo  $p_i$  que pertenece a la descomposición primaria del ideal  $J_{f,g}$  tal que  $J_\alpha \subset p_i$  y  $ht(p_i) = ht(J_\alpha) = m - 1$ . Más aún, si existe un primo  $p$  tal que  $\langle J_\alpha, J_\beta \rangle \subset p$ , con  $\alpha \neq \beta$  entonces  $ht(p) = \dim(R) = m$ .*

**Prueba.** Notemos que para  $\alpha \neq \beta$  tenemos

$$J_{f,g} = J_{h_\alpha, h_\beta} \subset J_\alpha. \quad (2.2)$$

Sea

$$J_{f,g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right)$$

la descomposición primaria del ideal jacobiano, con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , y  $ht(p_i) = m - 1$ ,  $ht(p'_j) = m$ . Notemos que aquí hemos usado el hecho que  $ht(J_{f,g}) \geq m - 2 + 1$  según el Lema 2.15.

Sea  $p$  un ideal primo tal que  $p \supset J_\alpha$  y  $ht(p) = ht(J_\alpha) = m - 1$ . Como  $J_\alpha \supset J_{f,g}$  (ver ecuación (2.2)) entonces

$$p \supset J_{f,g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right).$$

Por lo tanto existe algún  $i$  tal que  $q_i \subseteq p$ , lo cual significa que  $p_i \subseteq p$ . Como  $ht(p_i) = ht(p)$  entonces  $p = p_i$ . Por lo tanto  $J_\alpha \subset p_i$ .

Finalmente sean  $\alpha \neq \beta \in k$  y  $p$  primo tal que  $\langle J_\alpha, J_\beta \rangle \subset p$ . Como  $h_\alpha \in \sqrt{J_\alpha}$  y  $h_\beta \in \sqrt{J_\beta}$  entonces

$$p \supset \langle h_\alpha, h_\beta, J_{h_\beta, h_\alpha} \rangle.$$

Como  $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle = \langle f, g \rangle$  y  $J_{h_\alpha, h_\beta} = J_{f,g}$ , se tiene que

$$p \supset \langle f, g, J_{f,g} \rangle.$$

Por hipótesis  $ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m$  entonces se tiene que

$$ht(p) = m. \quad \blacksquare$$

**Corolario 2.20.** *Conservamos la notación del Lema anterior. Sea*

$$J_{f,g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right)$$

la descomposición primaria del ideal jacobiano, con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , y  $ht(p_i) = m - 1$ ,  $ht(p'_j) = m$ . Entonces el número de elementos del conjunto

$$W := \{ \lambda \in k : ht(J_\lambda) < m. \}$$

es menor o igual a  $t$ .

**Prueba.** De la definición del determinante tenemos que  $J_{f,g} = J_{h_\lambda,g}$ . De la inclusión  $J_{h_\lambda,g} \subset J_\lambda$  tenemos que  $J_{f,g} \subset J_\lambda$ . Esta última conclusión implica la desigualdad  $ht(J_{f,g}) \leq ht(J_\lambda)$ . Como  $ht(J_{f,g}) \geq m - 1$  (ver Lema 2.15) entonces  $ht(J_\lambda) \geq m - 1$ . Por lo tanto suponer que  $ht(J_\lambda) < m$  equivale asumir que  $ht(J_\lambda) = m - 1$ . Esto significa que

$$W = \{\lambda : ht(J_\lambda) = m - 1\}.$$

Del Lema anterior se desprende que cada  $J_\lambda$  con  $\lambda \in W$  está contenido en el primo  $p_i$  para algún  $i = 1, \dots, t$ .

Como cada  $p_i$  contiene a lo más un  $J_\lambda$  (por que sino  $ht(p_i) = m$  por el Lema 2.19), el número de elementos de  $W$  es menor igual a  $t$ . ■

**Proposición 2.21.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Entonces existe  $h \in I$  tal que  $ht(J_h) = m$*

**Prueba.** Como el conjunto  $W$  tiene a lo más  $t$  elementos y  $k$  es un cuerpo infinito entonces basta tomar  $h = h_\alpha$  con  $\alpha \notin W$ . ■

**Nota.** Del Corolario 2.20 se desprende que la mayoría (salvo tal vez un número finito) de representantes de la forma  $f + \lambda g$  cumple la tesis anterior. Más aún, la Proposición 2.21 se puede optimizar de la siguiente manera:

**Corolario 2.22.** *Sea  $(R, \eta)$  anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f, g \rangle$  ideal de intersección completa con una singularidad aislada en  $\eta$ . Entonces existe  $h_\alpha, h_\beta \in I$  tal que  $ht(J_{h_\alpha}) = ht(J_{h_\beta}) = m$  e  $I = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle$ .*

**Prueba.** Nuevamente como  $W$  tiene a lo más  $t$  elementos y  $k$  es infinito entonces basta tomar  $h_\alpha$  y  $h_\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  diferentes en  $k \setminus W$ . La igualdad  $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle = \langle f, g \rangle$  finaliza la prueba. ■

**Observación.** El Corolario 2.22 también se puede interpretar como un **Teorema de Clasificación de las singularidades aisladas de intersección completa** para dos polinomios. Nos indica que las icis son sólo aquellas que se pueden formar con las hipersuperficies que tengan una singularidad aislada de modo que sus respectivos generadores formen una secuencia regular y una singularidad aislada.

Notemos también que la **única hipótesis** que se usa **respecto al cuerpo  $k$  es que este sea de característica cero**. Este resultado se extiende para icis que estén generadas por  $r$  elementos.

**Observación.** Hemos demostrado que un elemento  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  sí sólo si  $ht(J_f) = m$ . Es decir si  $ht(J_f) < m$ , el lugar singular de  $f$  tiene dimensión mayor que cero (más complicada). En el ámbito de la geometría el lugar singular de  $f$  representa el conjunto  $Z(\langle f, J_f \rangle)$ . En el álgebra representan los ideales primos  $P$  que contienen a  $\langle f, J_f \rangle$ . Sea  $I = \langle f, g \rangle$  una icis donde ninguno de sus generadores sea regular. Es decir  $ht(J_f) \leq m$  o  $ht(J_g) \leq m$  y puede suceder que  $ht(J_f) < m$ . Esta última condición significa que para cada  $f, g$  el lugar singular es de dimensión mayor o igual a cero. Hemos demostrado que podemos hallar generadores  $f', g'$  donde cada uno de ellos tiene una singularidad aislada. Este resultado se puede interpretar como una *reducción de la singularidad* de los representantes  $f, g$ . Es decir, los generadores  $f, g$  tienen un lugar singular de dimensión mayor que un punto, ahora para los generadores  $f', g'$  sus respectivos lugares singulares son solo puntos.

Es lícito pensar que podemos hallar generadores  $h_1, \dots, h_r$  donde al menos uno de ellos sea regular. Es decir proporcionar una reducción total de la singularidad de por lo menos un generador. En el siguiente ejemplo veremos que esto no es posible. La hipótesis que el ideal  $I$  no tenga generadores regulares nos indica que  $I \subset \eta^2$ . Esto significa que no podemos hallar en el ideal  $I$  un elemento regular.

**Ejemplo 2.23.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$ , el anillo regular local y  $f = x^2 + y^2$ ,  $g = xy + y^2$  entonces  $J_F = \langle x(2y + x) - y^2 \rangle$ . Se prueba que  $I = \langle f, g \rangle$  es una icis. Se cumple que  $I \subset \eta^2$ . Si  $I = \langle f', g' \rangle$  donde al menos  $f'$  es regular entonces del Lema 1.43 se desprende que  $J_{f'} = R$ . Esto significa que  $f' = P + ax + by$ , donde  $P \in \eta^2$  y  $a$  o  $b$  es diferente de cero. Esto significa que  $f' \notin \eta^2$  y por lo tanto  $I \not\subset \eta^2$ , una contradicción.

## 2.2. Cohomología de complejo Koszul para $I = \langle f, g \rangle$

Describiremos ciertos complejos  $L_j$  que representan una generalización del llamado complejo Koszul. Cuando  $I = \langle f \rangle$  es generado por un solo polinomio  $L_j$  se reduce al complejo Koszul. Esto que nos permita estudiar su cohomología. En un primer momento abordamos el caso  $I = \langle f \rangle$ . Calculamos la cohomología de los complejos  $L_j$  para todo  $j > m$ . Finalmente en el caso  $I = \langle f, g \rangle$  presentamos un ejemplo que nos demuestra que no pode-

mos seguir el camino que se planteó para el caso en que  $I = \langle f \rangle$ , donde  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}(R/\langle f \rangle, R/J_f)$ . En nuestro caso esto sólo sucede cuando  $j < m$  donde se pueden emplear las mismas técnicas. Para  $j \geq m$  mostramos que los complejos  $L_j$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos. En este caso proporcionamos una secuencia espectral  $E^*$  que converge a la cohomología de  $L_j$  y colapsa en el segundo término. Calculamos de manera conveniente el término  $E_{*,*}^1$ . En el caso particular en que  $J_g \subset J_f$  demostramos que  $E^\infty = E^1$ . La mayoría de ejemplos que conocemos cumplen esta condición, por ejemplo las curvas sobre  $\mathbb{C}$  inmersas en dimensión 3 clasificadas por ejemplo en [Looj]. En estos ejemplos podemos calcular entonces los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$ .

En el caso general demostramos que los complejos  $L_j$  para  $j < m - 1$  cumplen que  $H^t(L_j) = 0$  para todo  $t < j$ , y  $H^j(L_j) \neq 0$ . En general, para los complejos  $L_j$  con  $j > m - 1$  calculamos los módulos de cohomología en los grados  $m - 2$  y  $m$ . El término en grado  $m - 1$  se encuentra en una secuencia exacta larga donde los términos son conocidos.

### 2.2.1. El Complejo $L_j$ .

Describimos de manera conveniente el complejo  $L_j$ . Estos complejos describen la homología de Hochschild. Bajo la hipótesis de singularidad aislada calculamos la cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  en el caso  $I = \langle f \rangle$ . Mostramos que en el caso  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  no se puede generalizar los cálculos que presentamos cuando  $I = \langle f \rangle$ .

Sea  $I$  un ideal generado por una secuencia regular. Definamos los complejos  $L_j$  como

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I \Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j},$$

si  $j \leq m := \dim(R)$  y

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-m+1} \Omega_R^{m-1}}{I^{j-m+2} \Omega_R^{m-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-m} \Omega_R^m}{I^{j-m+1} \Omega_R^m}$$

si  $j > m$ . Vamos a describir a estos complejos  $L_j$  de una manera conveniente

en la Proposición 2.24. Cuando el anillo  $R$  es r.l.e.t.f. se tiene que

$$\frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s}} \simeq \frac{I^s}{I^{s+1}} \otimes_R \Omega_R^{j-s}$$

pues  $\Omega^s$  es libre

Debido a que el ideal  $I$  es de intersección completa, el  $R/I$ -módulo graduado  $\bigoplus_{s \geq 0} \frac{I^s}{I^{s+1}}$  es isomorfo al anillo de polinomios  $\frac{R}{I}[y_1, \dots, y_r]$  (ver Proposición 1.30) donde  $ht(I) = r$ . Denotemos al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de  $k[y_1, \dots, y_r]$  de grado  $s$  por  $\bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r}$ , donde  $a = (a_1, \dots, a_r)$  y  $|a| = a_1 + \dots + a_r$ . Con esta notación se prueba que

$$\frac{I^s}{I^{s+1}} \simeq \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \frac{R}{I}.$$

Usando estos isomorfismos veremos que el morfismo borde resulta ser casi la multiplicación por los  $df_i$ . En efecto definamos  $\bar{\Omega} := \Omega \otimes R/I$ , el siguiente diagrama conmutativo define  $\delta$

$$\begin{array}{ccc} \frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s}} & \xrightarrow{d} & \frac{I^{s-1} \Omega_R^{j-s+1}}{I^s \Omega_R^{j-s+1}} \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s} & \xrightarrow{\delta'} & \bigoplus_{|a|=s-1} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \Omega_R^{j-s+1}, \end{array}$$

donde  $z = y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes \bar{\omega} \in \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s}$  corresponde a  $x = \overline{f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} \omega}$  en el módulo  $\frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s}}$ . De la definición del morfismo  $d$  se sigue que

$$\begin{aligned} d(x) &= \sum_{i=1}^r \overline{f_1^{a_1} \cdots f_i^{a_i-1} \cdots f_r^{a_r} \cdot a_i \cdot df_i \wedge \omega} + \overline{f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} d(\omega)} = \\ &= \sum_{i=1}^r \overline{f_1^{a_1} \cdots f_i^{a_i-1} \cdots f_r^{a_r} \cdot a_i \cdot df_i \wedge \omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $d(x)$  corresponde al elemento  $\sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-1} \cdots y_r^{a_r} \otimes a_i \cdot \overline{df_i \wedge \omega}$  en el módulo  $\bigoplus_{|a|=s-1} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \overline{\Omega_R^{j-s+1}}$ . Entonces podemos escribir

$$\delta'(z) = \sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-1} \cdots y_r^{a_r} \otimes a_i \cdot \overline{df_i \wedge \omega}$$

Notemos que  $a_i$  puede ser cero.

Como  $k \supset \mathbb{Q}$  podemos reemplazar las potencias  $f_i^j$  por  $f_i^{(j)} = \frac{f_i^j}{j!}$  entonces el morfismo se define sólo con la multiplicación por  $df_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Es decir el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s+1}} & \xrightarrow{d} & \frac{I^{s-1} \Omega_R^{j-s+1}}{I^s \Omega_R^{j-s+1}} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \bigoplus_{|a|=s} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^{j-s}} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=s-1} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^{j-s+1}}. \end{array}$$

es conmutativo, donde

$$\delta(y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes \omega) = \sum_{i=1}^r y_1^{(a_1)} \cdots y_i^{(a_i-1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes \overline{df_i \wedge \omega}.$$

Por convención  $y_i^{(b)} = 0$  si  $b < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .

**Proposición 2.24.** *El complejo  $L_j$  es isomorfo a*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{|a|=j} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^0} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-1} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{|a|=1} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^{j-1}} & \longrightarrow & \bigoplus_{|a|=0} y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes_k \overline{\Omega_R^j} & & \end{array}$$

donde

$$\delta(y_1^{(a_1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes \omega) = \sum y_1^{(a_1)} \cdots y_i^{(a_i-1)} \cdots y_r^{(a_r)} \otimes \overline{df_i \wedge \omega},$$

$$y \overline{\Omega_R^*} = \Omega_R^* \otimes_R R/I.$$

**Prueba.** Se sigue del análisis anterior. ■

**Observación.** Veamos rápidamente el caso en el cual  $I = \langle f \rangle$  para valores de  $j \geq m = \dim(R)$ . En este caso se prueba que el complejo  $L_j$  es isomorfo a

$$\overline{\Omega}_R^0 \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^m$$

(usar Proposición 2.24 y notar que  $k[x]_s \otimes_k \overline{\Omega}^i \simeq \overline{\Omega}^i$ .) Esto se puede escribir como

$$(\Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega_R^m) \otimes_R R/\langle f \rangle.$$

Es decir  $L_j = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R \frac{R}{I}$ , donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$  para cierta base  $dx_1, \dots, dx_m$  del módulo  $\Omega_R^1$ .

**Observación.** Basados en la descripción anterior podemos calcular, en el caso particular que  $I = \langle f \rangle$ , lo siguiente : Sea el anillo  $R = k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ . Si  $f$  es regular (es decir  $J_f = R$ , ver Lema 1.43) entonces  $H^*(L_*) = \Omega_{R/I}^*$ . La demostración de esta afirmación se esboza en el siguiente ejemplo.

**Observación.** Si a la hipótesis de intersección completa impuesta al ideal  $I$  le agregamos la hipótesis de singularidad aislada, es decir

$$ht(\langle J_f, f \rangle) = \dim(R) = m$$

tenemos la siguiente Proposición.

**Proposición 2.25.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada. La cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  cumple*

$$H^s(L_j) = \text{Tor}_{m-s}\left(\frac{R}{J_f}, \frac{R}{I}\right)$$

para todo  $s \leq m$ .

**Prueba.** En efecto, sea

$$L_j : (\Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega_R^m) \otimes_R \frac{R}{I} = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I,$$

donde  $df = \sum_{i=1}^m df_{x_i} dx_i$ . Como  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces  $\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\}$  forman una secuencia regular. Por lo tanto el complejo Koszul  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  de  $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$  es una resolución de  $R/J_f \simeq \Omega^m/df$ , donde  $df$  denota la imagen de  $df \wedge - : \Omega^{m-1} \rightarrow \Omega^m$ . Es decir  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right)$ . ■

**Ejemplo 2.26.** Sea  $f = x^2 + y^2 + z^2$  en  $(k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ , entonces  $J_f = \eta$ . Como  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f})$ , si usamos la resolución

$$K(f) : R \xrightarrow{f} R$$

de  $R/I$  tenemos que

$$K(f) \otimes_R R/\eta : k \xrightarrow{0} k.$$

Por lo tanto

$$H^*(L_j) = \begin{cases} k & \text{si } *=m \\ k & \text{si } *=m-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Para el caso de un polinomio el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  fueron realizados por Michler. Presentamos una leve generalización de su resultado.

**Corolario 2.27.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^*(L_j) = \begin{cases} \frac{(J_f:f)}{J_f} & \text{si } *=m-1 \\ \frac{R}{\langle f, J_f \rangle} & \text{si } *=m \end{cases} \quad (2.4)$$

para  $j \geq m = \dim R$ .

**Prueba.** Será suficiente hallar una resolución de  $R/\langle f \rangle$  (ver Proposición 2.25). Como  $R$  es un dominio, el complejo

$$K(f) : R \xrightarrow{f} R$$

es una resolución de  $R/\langle f \rangle$ . Por lo tanto el complejo  $K(f) \otimes R/J_f$  se escribe como

$$K(f) \otimes R/\langle J_f \rangle : 0 \longrightarrow R/\langle J_f \rangle \xrightarrow{f} R/\langle J_f \rangle.$$

De aquí se sigue que  $H^{m-1}(L_j) = \frac{(J_f:f)}{J_f}$ , y  $H^m(L_j) = R/\langle f, J_f \rangle$ . ■

**Observación.** Notemos que la dimensión de  $H^m(L_j)$  (para  $j \geq m$ ) es el número de Tjurina de la singularidad (ver Observación en la Proposición 2.4)

De ahora en adelante, hasta finalizar la sección, veremos solamente el caso en el que  $I = \langle f, g \rangle$  sea intersección completa y tenga una singularidad aislada. Es decir trabajaremos bajo la hipótesis que el ideal  $I$  sea intersección completa y cumpla la siguiente propiedad :

$$ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m.$$

Nuestro estudio se centrará en la cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq \dim(R)$ . En adelante para no cargar la notación escribiremos  $y_i^a$  por  $y_i^{(a)}$ . La Proposición 2.24 prueba que los complejos  $L_{m+k}$  se expresan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L_{m+p} : \bigoplus_{|a|=m+p} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^0 &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=m+p-1} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \\ &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p+1} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^{m-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^m, \end{aligned}$$

donde  $\bar{\Omega}^s = \Omega^s \otimes_R R/I$ . A partir de aquí usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \bigoplus_{|\alpha|=i+p; a_2=l} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \Omega^{m-i},$$

especialmente cuando escribamos  $L'_{m+p}$  como un bicomplejo. Cuando no halla lugar a duda en que complejo  $L_j$  estemos trabajando sólo pondremos  $\Omega_{i,l}^{m-i}$ . Notemos que  $y_1^j y_2^i \bar{\Omega}^s \simeq y_1^j y_2^{i-1} \bar{\Omega}^s \simeq \bar{\Omega}^s$ .

**Definición 2.28.** Definamos los complejos  $L'_{m+p}$  de la siguiente manera :

$$L'_{m+p} : \bigoplus_{l=0}^{m+p} \Omega_{m,l}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{m+p-1} \Omega_{m-1,l}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^p \Omega_{0,l}^m \longrightarrow 0,$$

y el morfismo borde se define como  $\delta(y_1^a y_2^b \omega) = y_1^{a-1} y_2^b df \wedge \omega + y_1^a y_2^{b-1} dg \wedge \omega$ , donde  $y_1^a = y_2^a = 0$  si  $a < 0$ .

**Observación.** Notemos que  $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes_R R/I$  y que  $\delta^2 = 0$ . Una idea natural para generalizar la Proposición 2.25 en el caso de más un polinomio es intentar probar que  $H^*(L_m) = \text{Tor}_{m-*}(\frac{R}{I}, R/\langle J_f, J_g \rangle)$  donde  $L'_m$  es una resolución de  $R/\langle J_f, J_g \rangle = H^m(L'_m)$ . El siguiente ejemplo muestra que esto no es posible :

**Ejemplo 2.29.** Sea  $f = x^2 + y^2 + z^2$  y  $g = xy + z^2$  en  $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ . Se prueba que  $f, g$  forman una secuencia regular. Un cálculo muestra que  $J_{f,g} = \langle x^2 - y^2, z(2x - y), z(2y - x) \rangle$ ,  $ht(\langle J_{f,g}, f, g \rangle) = 3$ . Es decir el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  tiene una singularidad aislada de intersección completa en  $\eta$ . Más aún como  $J_f = J_g = \eta$  entonces  $ht(J_f) = ht(J_g) = 3 = \dim \text{Krull}(R)$ . Del Corolario 2.5 la última conclusión significa que  $f$  y  $g$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$ . Esto a su vez equivale a tener que los complejos  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  y  $K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$ , tienen cohomología cero para todo  $i \neq m$ , donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$  y  $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$ .

Debido a que el complejo  $L_m$  se puede escribir como

$$L_m : \begin{array}{ccccccc} & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \overline{\Omega}_{1,1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \overline{\Omega}_{2,1}^{m-2} & \xleftarrow{dg} & \overline{\Omega}_{3,1}^{m-3} & \xleftarrow{\quad} & \cdots \\ & \downarrow df & & \downarrow df & & \downarrow df & \\ \overline{\Omega}_{0,0}^m & \xleftarrow{dg} & \overline{\Omega}_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \overline{\Omega}_{2,0}^{m-2} & \xleftarrow{\quad} & \cdots \end{array}$$

tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0,$$

donde, en  $L_m$ , identificamos la primera columna de la izquierda con el complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$ , y el cociente con  $L_{m-1}$  (notemos que  $x^j y^i \overline{\Omega}^s \simeq x^j y^{i-1} \overline{\Omega}^s$ ). Como  $f$  tiene una singularidad aislada entonces

$$H^*(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_{f,g}}).$$

Por lo tanto si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología tenemos

$$\begin{aligned}
& \dots \longrightarrow H^{m-2}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_1} \\
\text{Tor}_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) & \longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df+dg} \xrightarrow{\delta_0} \\
\text{Tor}_0\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) & \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^m}{df+dg}.
\end{aligned}$$

Sin dificultad se prueba que  $\delta_0 = 0$  pues  $J_g \subset J_f$  y entonces  $\delta_0([\overline{\omega}]) = \overline{[dg \wedge \omega]} = 0 \in H^m(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = R/J_f = R/J_g$ . Veamos qué sucede con  $\delta_1$ . Sea  $[(\overline{w}_0, \overline{w}_1)]$  un elemento en el módulo  $H^{m-2}(L_{m-1})$ . Entonces para representantes  $(w_0, w_1)$  en la clase  $(\overline{w}_0, \overline{w}_1)$  de  $(L_{m-1})_{m-2}$  se cumple

$$df \wedge w_1 + dg \wedge w_0 = f \cdot \eta_1 + g \cdot \eta_2.$$

Si efectuamos el producto  $dg \wedge$  en la igualdad anterior tenemos

$$dg \wedge (df \wedge w_1 + dg \wedge w_0) = dg \wedge (f \cdot \eta_1 + g \cdot \eta_2). \quad (2.5)$$

Como  $J_f = J_g$  se tiene  $dg \wedge \eta_1, dg \wedge \eta_2 \in dg \wedge \Omega_R^{m-1} \simeq J_g = J_f \simeq df \wedge \Omega_R^{m-1}$ . Entonces existen  $\eta'_1, \eta'_2 \in \Omega_R^{m-1}$  tal que  $dg \wedge \eta_1 = df \wedge \eta'_1$  y  $dg \wedge \eta_2 = df \wedge \eta'_2$ . Por lo tanto podemos escribir

$$(f \cdot dg \wedge \eta_1 + g \cdot dg \wedge \eta_2) = (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2).$$

De aquí se sigue que la ecuación 2.5 se escribe como

$$dg \wedge df \wedge w_1 - (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2) = 0.$$

Si factorizamos  $df \wedge$  obtenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 + f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = 0.$$

Como  $df \wedge$  es el diferencial del complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  tiene cohomología cero en todos los grados salvo en nivel  $m$  (pues  $ht(J_f) = m$ ), tenemos que  $dg \wedge w_1 + (f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = df \wedge \eta_2$ , para algún  $\eta_2$ . Es decir  $\overline{dg \wedge w_1} = \overline{df \wedge \eta_2}$  en  $\overline{\Omega}^{m-1}$  y

$$\delta_1([\overline{w}_1, \overline{w}_2]) = \overline{[dg \wedge w_1]} = \overline{[df \wedge \eta_2]} = 0$$

en  $H^{m-1}(K(f_1, \dots, f_m))$ . Por lo tanto tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) \longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df + dg} \longrightarrow 0. \quad (2.6)$$

A continuación calculamos el módulo  $\text{Tor}_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right)$ . Si Usamos la hipótesis que el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  es intersección completa tenemos que el complejo

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(f,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,f)} R \longrightarrow 0$$

es una resolución de  $\frac{R}{I}$ . Si efectuamos el producto tensorial  $\otimes_R \frac{R}{J_f} = \otimes_R k$  en el complejo anterior obtenemos

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

Esto significa que  $\text{Tor}_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) = k \oplus k$ . Antes de continuar un lema que nos permitirá demostrar que  $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df+dg}$  es un módulo no nulo.

**Lema 2.30.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f, y  $\langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada. La aplicación*

$$df : \frac{\Omega^{m-1}}{df \wedge \Omega^{m-2} + dg \wedge \Omega^{m-2}} \rightarrow \frac{J_f \Omega^m}{J_{f,g} \Omega^m} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$$

definida por  $\overline{w} \mapsto \overline{df \wedge w}$  es un isomorfismo.

**Prueba.** Sólo la inyectividad no es clara. Si  $\overline{df \wedge w} = 0$  entonces  $df \wedge w = df \wedge dg \wedge w_1$ , por lo tanto  $df \wedge (w - dg \wedge w_1) = 0$ . Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$  entonces existe  $w_2 \in \Omega^{m-2}$  tal que  $w = dg \wedge w_1 + df \wedge w_2$ , es decir  $\overline{w} = 0$ . ■

Notemos que,  $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df+dg} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes_R \frac{R}{I} \neq 0$  por que si no  $M = \frac{J_f}{J_{f,g}}$  cumpliría que  $\frac{M}{IM} = 0$  y por el Lema de Nakayama se tendría  $M = 0$ . Pero  $J_f = \eta$  y  $J_{f,g} \subset \eta^2$  nos dice que  $M \neq 0$ . Por (2.6),  $\dim(H^{m-1}(L_m)) > 2$  y no puede ser isomorfo a

$$\text{Tor}_1(R/I, R/\langle J_f, J_g \rangle) = \text{Tor}_1(R/I, R/J_f).$$

Esto finaliza el Ejemplo 2.29.

**Corolario 2.31.** *El complejo  $L'_m$  no es exacto en general.*

**Prueba.** Si no  $L'_m$  sería una resolución de  $R/\langle J_f, J_g \rangle$  y

$$H^{m-1}(L_m) = \text{Tor}_1(R/I, R/\langle J_f, J_g \rangle).$$

■

**Observación.** Interesados en conocer la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  presentaremos el cálculo de la cohomología de ciertos complejos  $L_j(x_1, \dots, x_r)$  isomorfos a  $L_j$  en cierta localización  $R_P$ . Ellos se pueden asumir como una generalización del complejo de Koszul. Por esta razón presentamos la siguiente subsección :

### 2.2.2. Una Generalización del Complejo de Koszul

En este ítem trabajaremos en  $A$  una  $k$ -álgebra local e.t.f. Entre los principales ejemplos de estas álgebras se encuentran los anillos  $(R, \eta)$  r.l.e.t.f., sus localizaciones y los anillos  $R/I$ , donde  $I$  es un ideal de intersección completa con una singularidad aislada.

En base a los complejos  $L_j$  para  $j > 0$  daremos la siguiente definición :

**Definición 2.32.** Sea  $(A, \eta)$  un anillo local con una estructura de  $k$ -álgebra,  $N = \bigoplus_{i=1}^m A \cdot dx_i$  un  $A$ -módulo libre. Denotemos  $N^i := \wedge^i N$ , y  $N^0 = A$ . Definamos los complejos  $L_j(dx_1, dx_2, N)$  con  $2 \leq m$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bigoplus_{|a|=j} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N^0 &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=j-1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N^{j-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N^j, \end{aligned}$$

si  $j < m$ , y

$$\begin{aligned} \bigoplus_{|a|=j} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k A &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=j-1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=j-m+1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N^{m-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=j-m} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \otimes_k N^m, \end{aligned}$$

si  $j \geq m$ . Donde  $\delta(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \omega) = x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} dx_1 \wedge \omega + x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} dx_2 \wedge \omega$ , y  $x_i^b = 0$ , si  $b < 0$ . Donde  $a = (a_1, a_2)$ , y  $|a| = a_1 + a_2 = j - s$ .

**Observación.** Cuando no haya lugar a confusión escribiremos  $L(x_1, x_2)$  por  $L_j(dx_1, dx_2, N)$ . Cuando  $df_1, df_2$  es parte de una base en  $\Omega_{R_P}^1$  es obvio que  $L(df_1, df_2, \Omega_{R_P}^1)$  es isomorfo a  $L(x_1, x_2)$  sobre un  $R_P$ -módulo libre de rango  $m$ .

**Lema 2.33.** *El complejo  $L_j(x_1, x_2)$  esta bien definido*

**Prueba.** Será suficiente demostrar que  $\delta^2 = 0$ . Que se sigue de al definición ■

**Observación.** En esta parte abordaremos el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j(x_1, x_2)$  donde  $A$  es un álgebra como en la Definición 2.32.

**Observación.** En el siguiente lema usamos la notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \Omega_{i,l}^{m-i} = x_1^a x_2^l \Omega^{m-i}.$$

**Lema 2.34.** *Sea  $j > m - 2$  entonces*

$$H^i(L_j) = 0$$

para todo  $i \geq 0$ . Sea  $j \leq m - 2$  entonces

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ N^j & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde  $N = \bigoplus_{i=2}^m Re_i$

**Prueba.** El complejo doble  $L_j$  para  $j = m + p$  se puede escribir como

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_{m+p} : & \Omega_{2,p+2}^m & \longleftarrow & \cdots & & & \\
 & \downarrow dx_1 & & \downarrow & & & \\
 & \Omega_{1,p+1}^m & \longleftarrow & \Omega_{2,p+1}^{m-1} & \longleftarrow & \cdots & \\
 & & \downarrow dx_2 & \downarrow dx_1 & & \downarrow & \\
 & & & \cdots & \longleftarrow & \Omega_{2,1}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow dx_2 & \downarrow dx_1 & \\
 & & & & & \Omega_{1,0}^m & \longleftarrow \Omega_{2,0}^{m-1} \longleftarrow \cdots
 \end{array}$$

Las primeras  $p + 2$  columnas son copias del complejo Koszul  $K(dx_1)$ . Todas ellas son una resolución de cero. Si tomamos cohomología en las columnas obtenemos el complejo

$$K : 0 \longrightarrow N^0 \xrightarrow{dx_2} N^1 \xrightarrow{dx_2} \dots \xrightarrow{dx_2} N^{m-1},$$

donde  $N = \bigoplus_{i=2}^m Re_i$ . El cual es exacto. El caso  $j < m$  es similar. ■

### 2.2.3. Cálculo de la cohomología de $L_j$

En esta parte nos encaminamos en dirección al cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . Como sabemos el complejo  $L'_m$  no es exacto en general. En relación a sus módulos de cohomología podemos precisar lo siguiente :

*Los módulos de cohomología del complejo  $L'_{m+p}$  están soportados en los primos  $P$  que contienen al ideal  $J_{f,g}$ .*

Él es pieza fundamental para demostrar que los complejos  $L_{m+p}$  para  $k \geq 0$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos. Este Teorema será uno de los pilares donde se sentara las bases de la siguiente sección. La igualdad  $ht(J_F) = m - r + 1$  conjuntamente con el resultado anterior nos permitirán demostrar :

Los complejos  $L_j$  para  $j \leq m - 2$  tienen cohomología cero para todo  $i \neq j$ . Para  $j = m - 1$  llegamos a que  $H^s(L_{m-1}) = Tor_{m-1-s}(J_f/J_{f,g}, R/I)$ . Finalmente para  $j \geq m$  presentamos una secuencia espectral  $E_{p,q}$  que converge a la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  y  $E^2 = E^\infty$ .

Los cálculos mencionados líneas atrás se sintetizan en el siguiente Teorema

**Teorema 2.35.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces*

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \min\{j, m - 2\}. \\ \frac{df \wedge \Omega^j}{df \wedge dg \wedge \Omega^{j-1}} \otimes R/I & \text{si } i = j \text{ y } j \leq m. \\ Tor_{m-1-i}\left(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I\right) & \text{si } j = m - 1. \\ Tor_1(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I) & \text{si } j > m - 1 \text{ e } i = m - 2, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $C_{p+1} = (L'_{m+p})^{\leq m-1}$  (ver Proposición 2.44). Para los términos en nivel  $m - 1$  y  $m$  presentamos una secuencia espectral

$$E_{2,0}^1 = \text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad (2.9)$$

$$E_{1,0}^1 = \text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{1,1}^1 = \text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I})$$

$$E_{0,0}^1 = \text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{0,1}^1 = \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}),$$

donde  $\text{Gr}(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p R/J_f$  (ver Teorema 2.51) y  $d^1$  es el producto exterior con  $dg$ .

En el caso que  $J_g$  este contenido en el ideal  $J_f$ , se cumple  $E^1 = E^\infty$ , lo cual se demuestra en el **Corolario 2.54**. Aunque la condición  $J_g \subset J_f$  simplifica significativamente los cálculos, esta se da en muchos ejemplos conocidos. Ello nos permite calcular los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  para el caso en que  $R/I$  es de dimensión cero y la singularidad es simple (clasificación de Guisti [G]) [Looj, 7.19], a excepción de  $H_\mu$  para  $\mu \geq 7$ , y **las singularidades simples de curvas inmersas en dimensión tres** (ver Ejemplo 2.56). El cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

Formalmente tenemos :

**Teorema 2.36.** *Sea  $P$  un ideal primo con  $P \not\supseteq J_{f,g}$ . Entonces  $(L'_j)_P \simeq L_j(x_1, x_2)$  (con  $N = \Omega_{R_P}^1$  y  $A = R_P$ ). En particular los complejos  $L'_j$  localizados en todo primo  $P \not\supseteq J_{f,g}$  son exactos en  $(R_P, \eta_P)$  para todo  $j \geq m - 1$ . Para  $j < m - 1$  los complejos  $(L'_j)_P$  son exactos excepto posiblemente en grado  $j$ .*

**Prueba.** Sea  $dx_1, \dots, dx_m$  una base del módulo libre  $\Omega_R^1$ , y  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$ ,  $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$  la representaciones de los diferenciales de  $f$  y  $g$  en dicha base. Entonces el ideal  $J_{f,g}$  es generado por los elementos  $f_{x_i} g_{x_j} - f_{x_j} g_{x_i}$ . Con estos lineamientos establecidos iniciemos la prueba del Teorema :

Sea  $P$  ideal primo tal que  $P \not\supseteq J_{f,g}$  entonces algún

$$f_{x_i} g_{x_j} - f_{x_j} g_{x_i} \notin P$$

para índices  $i, j$  diferentes. Es decir  $f_{x_i} g_{x_j} - f_{x_j} g_{x_i}$  es unidad en  $R_P$ .

**Afirmación.** Sin pérdida de generalidad podemos suponer (por un isomorfismo del módulo libre  $\Omega_R^1$  que reordene la base) que

$$f_{x_1}g_{x_2} - f_{x_2}g_{x_1} \notin P.$$

Por otro lado como  $\Omega_{R_p}^1 = \bigoplus_{i=1}^m R_p dx_i$ , definamos  $N := \Omega_{R_p}^1$ . Esta notación es sólo para indicar que  $T$  establece un isomorfismo entre los complejos  $(L'_j)_P$  y  $L_j(x_1, x_2)$ . Definamos la aplicación  $R_p$  lineal

$$T : N \longrightarrow \Omega_{R_p}^1$$

como  $Tdx_1 = df$ ,  $Tdx_2 = dg$  y  $Tdx_i = dx_i$  para  $i \geq 3$ . De la representación matricial de  $T$  en la base  $dx_1, \dots, dx_m$  tenemos que  $|T| = f_{x_1}g_{x_2} - f_{x_2}g_{x_1}$  es unidad en  $R_p$ . Por lo tanto  $T^{-1} = \frac{Adj(T)}{|T|}$  está bien definido. Esto significa que  $df_1, df_2$  forman parte de una base de  $\Omega_{R_p}^1$ . Entonces  $(L'_j)_P = L_j(df_1, \dots, df_r, \Omega_{R_p}^1)$

El hecho que  $L'_j$  sea exacto para  $j \geq m - 1$  se sigue del Corolario 2.34. La conclusión que los  $L_j$  para  $j < m - 1$  sean exactos excepto en el último nivel se sigue también del Corolario 2.34. ■

**Observación.** Si repetimos la demostración anterior ahora para el módulo  $\overline{\Omega}_R^*$  obtenemos

**Teorema 2.37.** *Los complejos  $L_j$  localizados en todo primo  $P \nmid J_{f,g}$  son exactos en  $((R/I)_P, \overline{\eta}_P)$  para todo  $j \geq m - 1$ . Para  $j < m - 1$  los complejos  $(L_j)_P$  son exactos salvo posiblemente en grado  $j$ .*

**Prueba.** Es la misma que la demostración anterior con  $A = (R/I)_P$  y  $N = \bigoplus_{i=1}^m Adx_i$ . ■

**Proposición 2.38.** *El complejo  $L'_{m-1}$  es exacto salvo en nivel  $m - 1$ .*

**Prueba.** Es claro que el complejo  $L'_{m-1}$  tiene longitud  $m - 1$ . Entonces demostrar que  $H^i(L'_{m-1}) = 0$  para todo  $i \neq m - 1$  -usando el criterio de exactitud- equivale a probar que :

$(L'_{m-1})_P$  tiene cohomología cero para todo  $i \neq m - 1$  para todo primo  $P$  tal que  $profundidad(P) = ht(P) < m - 1$ .

En efecto sea  $P$  primo tal que  $ht(P) < m - 1$ . Del Corolario 2.18 tenemos

$$ht(J_F) = m - r + 1.$$

En el caso particular que  $r = 2$  obtenemos  $ht(J_{f,g}) = m - 2 + 1$ , es decir  $J_{f,g} \not\subseteq P$ . Entonces en  $R_P$  el complejo  $(L'_{m-1})_P$  es exacto. (ver Teorema 2.36). Esto finaliza la prueba. ■

**Corolario 2.39.** *La cohomología del complejo  $L_{m-1}$  cumple*

$$H^*(L_{m-1}) = Tor_{m-1-*}(R/I, \frac{J_f}{J_{f,g}}),$$

donde  $I = \langle f, g \rangle$  y el generador  $\langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ .

**Prueba.** Por la proposición, reindexando,  $L'_{m-1}$  es una resolución de

$$H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$$

(Lema 2.30) y  $L_{m-1} = L'_{m-1} \otimes R/I$ . Entonces

$$H^*(L_{m-1}) = Tor_{m-1-*}(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I).$$
■

**Observación.** El corolario anterior es una generalización del Corolario 2.25.

**Observación.** Hemos expresado los módulos de cohomología del complejo  $L_{m-1}$  en función de  $Tor_*(R/I, J_f/J_{f,g})$ . A continuación veremos cuantos de ellos son nulos.

**Corolario 2.40.** *Si  $i \neq m - 1, m - 2$  entonces  $H^i(L_{m-1}) = 0$ .*

**Prueba.** Se sigue del hecho que  $ht(J_{f,g}) = m - 1$  y un aplicación directa del teorema. ■

**Observación.** A continuación veremos que la cohomología de los complejos  $L'_j$  cumple que  $H^i(L'_j) = 0$  si  $i \neq j < m - 1$ . Existen diferentes maneras de demostrar esta afirmación nosotros nos basaremos en el criterio de exactitud.

**Corolario 2.41.** *Los complejos  $L'_j$  son exactos  $\forall j < m - 1$  salvo en grado  $j$ .*

**Prueba.** Sea  $L'_j$  con  $j < m - 1$  entonces el complejo tienen longitud  $j$ . Sea  $P$  un ideal primo tal que  $ht(P) < j$ . Como  $ht(J_{f,g}) \geq m - 1$  entonces  $P \not\supseteq J_{f,g}$ . Del Teorema 2.36 se sigue que  $(L'_j)_P$  es exacto salvo posiblemente en grado  $j$ . Una aplicación directa del criterio de exactitud finaliza la prueba. ■

**Proposición 2.42.** *Sea  $j \leq m - 2$  entonces para todo  $t \neq j$  tenemos  $H^t(L_j) = 0$ .*

**Prueba.** Sea  $P$  un ideal primo en el anillo  $R/I$  diferente del maximal. Como siempre obviaremos la notación de clase de equivalencia en el anillo  $R/I$ . Como  $ht(J_{f,g}) = m - 1$  entonces  $P \not\supseteq J_{f,g}$ . Por lo tanto del Teorema 2.37 se tiene que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $i \neq j$ . Una aplicación directa del Criterio de exactitud en el anillo  $R/I$  concluye la prueba. ■

**Observación.** Una de las principales propiedades que usamos en las demostraciones anteriores y que se manifiesta en el Teorema 2.36 es que los módulos de cohomología de los complejos  $L'_{m+p}$  están soportados en los primos  $P \supset J_{f,g}$ . La otra propiedad que hemos usado es que los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  están soportados sólo en el ideal maximal (Proposición 2.42.)

A continuación demostraremos que los complejos  $L_{m+p}$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos.

**Teorema 2.43.** *Se cumple que  $H^s(L_j) = 0$ , para todo  $s \leq m - 3$ ,  $s > m$  y  $j \geq m$ .*

**Prueba.** Se sigue del hecho que  $ht(J_{f,g}) = m - 1 > s$  y el criterio de exactitud. ■

**Observación.** A continuación presentamos el cálculo del módulo de cohomología  $H^{m-2}(L_{m+p})$  para todo  $p \geq 0$ . La primera parte de la prueba se basa en el Teorema 2.36 y el hecho que  $ht(J_{f,g}) \geq m - 1$ . A continuación usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \bigoplus_{|\alpha|=i+p; a_2=l} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \Omega^{m-i},$$

establecida líneas atrás

**Proposición 2.44.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f entonces el complejo

$$C_{p+1} : \bigoplus_{l=0}^{m+p} \Omega_{m,l,m+p}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{m+p-1} \Omega_{m-1,l,m+p}^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{p+1} \Omega_{1,l,m+p}^{m-1} \longrightarrow 0,$$

es exacto salvo en grado  $m - 1$ .

**Prueba.** Notemos que  $C_{p+1}$  es un complejo de módulos libres de longitud  $m - 1$  tal que  $(C_{p+1})_s = (L'_{m+p})_s$  para todo  $s \leq m - 1$ . A continuación aplicamos el criterio de exactitud al complejo  $C_{p+1}$  :

En efecto, sea  $P$  primo con  $ht(P) < m - 1$ . Como  $ht(J_{f,g}) \geq m - 1$  entonces  $P \not\subseteq J_{f,g}$ . Del Teorema 2.36 tenemos que  $H^s((L'_{m+p})_P) = 0$  para todo  $s \leq m$ . Es decir  $H^s((C_{p+1})_P) = 0$  en  $R_P$  para todo primo  $P \subset \eta$ , con  $ht(P) < m - 1$ , y  $s \leq m - 2$ . Esto significa, si empleamos el criterio de exactitud, que  $H^i(C_{p+1}) = 0$  para todo  $i \neq m - 1$  en el anillo local  $(R, \eta)$ . ■

**Observación.** El siguiente lema tiene como fin calcular el último módulo de cohomología del complejo  $C_{p+1}$ .

**Lema 2.45.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. El complejo

$$K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) : 0 \longrightarrow \Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega_R^m,$$

tiene a lo más los dos últimos módulos de cohomología no nulos.

**Prueba.** Como  $J_f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \supset J_{f,g}$  y  $ht(J_{f,g}) = m - 1$  (Corolario 2.18) entonces  $ht(J_f) \geq m - 1$ . ■

**Observación.** Si en el complejo  $L'_{m+p}$  usamos la notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \Omega_{i,l}^{m-i} = x^a y^l \Omega^{m-i},$$

entonces el complejo  $C_{p+1}$  se escribe de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{p+1} : & \Omega_{2,p+2}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots & & & \\
& \downarrow df & & \downarrow & & & \\
& \Omega_{1,p+1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,p+1}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots & \\
& & & \downarrow df & & \downarrow & \\
& & & \cdots & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \\
& & & & & \downarrow df & \\
& & & & & \Omega_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \Omega_{2,0}^{m-2} \longleftarrow \cdots
\end{array}$$

y podemos identificar la primera columna de la izquierda con el complejo  $K'$

$$\Omega^0 \xrightarrow{df} \Omega^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega^{m-2} \xrightarrow{df} \Omega^{m-1}.$$

Del Lema anterior se sigue que  $K'$  es exacto excepto en el último nivel.

Si describimos el complejo  $C_p$  como un bicomplejo se tiene que

$$C_p \cong \frac{C_{p+1}}{K'} \quad (2.10)$$

identificando  $\Omega_{s,t}^j$  en  $C_{p+1}$  con  $\Omega_{s,t-1}^j$  en  $C_p$ . Notemos que por definición el complejo  $C_p$  es el complejo  $L'_{m+p-1}$  cortado en grado  $m-1$ . Por lo tanto tenemos la siguiente secuencia exacta corta de complejos.

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_{p+1} \longrightarrow C_p \longrightarrow 0. \quad (2.11)$$

Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología obtenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_{p+1}) \longrightarrow H^{m-1}(C_p) \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$C_0 = L'_{m-1}. \quad (2.12)$$

**Lema 2.46.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $K'$  el complejo*

$$\Omega^0 \xrightarrow{df} \Omega^1 \xrightarrow{df} \cdots \Omega^{m-2} \xrightarrow{df} \Omega^{m-1}.$$

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^{m-1}(K') \simeq J_f,$$

y  $H^i(K') = 0$  si  $i \neq m - 1$ .

**Prueba.** Definamos la aplicación

$$df : \frac{\Omega^{m-1}}{df \wedge \Omega^{m-2}} \longrightarrow J_f \Omega^m \simeq J_f$$

de la siguiente manera  $\bar{\omega} \mapsto df \wedge \omega$ . La buena definición se sigue del hecho que  $df \wedge df = 0$ . Si identificamos  $\Omega^m$  con el anillo  $R$  entonces  $df \wedge \Omega^{m-1} = J_f$ . Por lo tanto la aplicación  $\omega \mapsto df \wedge \omega$  es sobre. Sea  $df \wedge \bar{\omega} = df \wedge \omega = 0$ . La hipótesis que  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  es equivalente a que  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Por lo tanto si  $df \wedge \omega = 0$  entonces  $\omega = df \wedge \omega_0$ . Es decir  $\bar{\omega} = 0$ . ■

**Observación.** A continuación calculamos los módulos de cohomología de los complejos  $C_{p+1}$ . Dicho cálculo se basa en la filtración por columnas del complejo  $L_{m+p}$ , secuencia exacta 2.11 y en el isomorfismo 2.12.

**Lema 2.47.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Si  $f$  y  $g$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$Gr(H^{m-1}(C_{p+1})) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \bigoplus \left[ \bigoplus_{i=1}^{p+1} (J_f)_i \right],$$

donde  $(J_f)_i = J_f$ .

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $k$  para valores de  $k \geq 0$ .

Sea  $k = 0$ . Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología en la secuencia

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_1) \longrightarrow H^{m-1}(C_0) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$Gr(H^{m-1}(C_1)) = H^{m-1}(K') \oplus H^{m-1}(C_0). \quad (2.13)$$

Como  $C_0 \simeq L'_{m-1}$  entonces  $H^{m-1}(C_0) = H^{m-1}(L'_{m-1})$ . Del Lema 2.30 se sigue que  $H^{m-1}(C_0) = \frac{J_f}{J_{f,g}}$ . Si reemplazamos los cálculos obtenidos en el isomorfismo (2.13) obtenemos

$$Gr(H^{m-1}(C_1)) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \bigoplus J_f.$$

Supongamos que el lema se cumple para  $p = s$ . Entonces

$$Gr(H^{m-1}(C_s)) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \bigoplus \left[ \bigoplus_{i=1}^s (J_f)_i \right]$$

Sea  $p = s + 1$ . Sea la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_{s+1} \longrightarrow C_s \longrightarrow 0.$$

Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología tenemos

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_{s+1}) \longrightarrow H^{m-1}(C_s) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$Gr(H^{m-1}(C_{s+1})) = H^{m-1}(C_{s+1}) \bigoplus H^{m-1}(K')$$

El caso  $p = s$  y Lema 2.46 finaliza la prueba. ■

**Observación.** El módulo graduado del lema anterior anterior se obtiene filtrando el complejo por columnas. Si filtramos el complejo  $C_{p+1}$  por filas obtenemos el siguiente módulo graduado

$$Gr_F(H^{m-1}(C_{p+1})) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \bigoplus \left[ \bigoplus_{i=1}^{p+1} (J_f)_i \right],$$

donde  $(J_f)_i = J_f$ . Develado el módulo  $H^{m-1}(C_{p+1})$  presentamos uno de los cálculos al cual se hizo alusión al inicio de la sección.

**Corolario 2.48.**  $H^{m-2}(L_{m+p}) = Tor_1(H^{m-1}(C_{p+1}), \frac{R}{I})$

**Prueba.** Como  $C_{p+1}$  es exacto salvo en el último nivel y

$$(L_{m+p})_s = (C_{p+1} \otimes_R R/I)_s$$

para todo  $s \leq m - 1$  entonces

$$H^s(C_{p+1} \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-1-s}(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I)$$

y

$$H^{m-2}(L_{m+p}) = \text{Tor}_1(H^{m-1}(C_{p+1}), \frac{R}{I}).$$

■

**Observación.** Esto es lo más lejos que podemos llegar siguiendo la idea de la Proposición 2.25 (ver Ejemplo 2.29).

A continuación veremos de que forma podemos calcular  $H^m(L_{m+p})$ , y  $H^{m-1}(L_{m+p})$ . De manera precisa presentamos una secuencia espectral tal que  $E^2 = E^\infty$  y converge a la cohomología de  $L_{m+p}$ . Se calcula  $H^{m-2}(L_{m+p})$  como  $H^m(L_{m+p})$ .

**Observación.** En estas líneas describiremos brevemente lo que más adelante formalizaremos. El complejo  $L'_{m+p}$  se puede escribir de la siguiente manera

$$L'_{m+p} : \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & & & \\ & & \downarrow df & & & & \\ & & \Omega_{1,p+1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \cdots \xleftarrow{dg} \cdots & & & \\ & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & & \\ \Omega_{0,p}^m & \xleftarrow{dg} & \Omega_{1,p}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \cdots \xleftarrow{dg} \cdots & & & \\ & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & & \\ & & \cdots & \xleftarrow{dg} \Omega_{1,1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \Omega_{2,1}^{m-2} & \xleftarrow{dg} \cdots & \\ & & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & \\ & & & \Omega_{0,0}^m & \xleftarrow{dg} \Omega_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \Omega_{2,0}^{m-2} & \xleftarrow{dg} \cdots \end{array} \quad (2.14)$$

**Notación.** A continuación usaremos la siguiente notación

$$B_{l,i-l} := \Omega_{i,l}^*$$



Mostraremos que este complejo es exacto salvo en el nivel  $m$ . Esta construcción y la prueba de la afirmación se presentan a continuación.

**Definición 2.49.** Dado el complejo  $L'_{m+p}$  definamos el subcomplejo  $(E'_p, \delta)$ , de la siguiente manera :

$$(E'_p)^{m-i} := \bigoplus_{s+t=i; t \leq 0} B_{s,t},$$

donde  $i + j + s = m + p$ .

**Observación.** Notemos que  $(E'_p, \delta)$  está formado por las primeras  $p + 1$  columnas de la izquierda del complejo  $L'_{m+p}$  (ver 2.14).

**Lema 2.50.** Si  $ht(J_f) = m$  entonces el complejo  $E'_p$  es exacto salvo en el nivel cero. Sea  $M_p := H^m(E'_p)$  entonces  $Gr(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$ .

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $p$  el número de columnas del complejo  $E'_p$ . Para el caso  $p = 0$  tenemos que  $E'_0 = K(df)$  el cual tiene cohomología cero para todo  $i \neq m$ . Más aún  $H^m(E'_0) = H^m(K(df)) = R/J_f$ .

De un proceso de inducción y la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(df) \longrightarrow E'_{p+1} \longrightarrow E'_p \longrightarrow 0$$

se prueba que  $H^i(E_{p+1}) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Si tomamos homología en la secuencia anterior nos queda la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow R/J_f \longrightarrow H^m(E_{p+1}) \longrightarrow H^m(E_p) \longrightarrow 0.$$

Esto significa que  $Gr(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$ . Notemos que la filtración por columnas es la que da origen al módulo graduado  $Gr(M_p)$ . ■

**Observación.** El Lema anterior nos indica que los módulos  $H^m(E_p)$  y  $\bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$  son isomorfos sólo como  $k$ -espacios vectoriales. Esto es debido a que no se encontró un split de  $R$ -módulos en la secuencia anterior. En el siguiente teorema vemos los complejos de cocadenas  $E_p$  y  $L_{m-1}$  como complejos de cadenas de la siguiente manera  $(E_p)^* = (E_p)_{m-*}$  y  $(L_{m-1})^* = (L_{m-1})_{m-1-*}$

**Teorema 2.51.** *Existe una secuencia espectral  $E_{p,q}^r$  que converge a  $H^*(L_{m+p})$ ,  $E^2 = E^\infty$  y el  $E^1$  es*

$$\text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \longleftarrow^{d^1} \text{Tor}_1(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \longleftarrow^{d^1} \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}),$$

donde  $d^1$  es el producto exterior por  $dg$ .

**Prueba.** La demostración se basa en escribir el complejo  $L_{m+p}$  como

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longleftarrow^{dg} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_3 & \longleftarrow^{dg} & (L_{m-1})_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_2 & \longleftarrow^{dg} & (L_{m-1})_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_1 & \longleftarrow^{dg} & (L_{m-1})_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_0 & \longleftarrow^{dg} & (L_{m-1})_0 \end{array}$$

donde  $E_p = E'_p \otimes R/I$ . Como  $E_p = E'_p \otimes R/I$  se prueba que

$$H^*(E_p) = \text{Tor}_{m-*}(R/I, M_p).$$

Por lo tanto si calculamos el primer término de la secuencia espectral al complejo anterior tenemos

$$\text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{dg} \text{Tor}_1(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{dg} \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{y } E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty \quad \blacksquare$$

**Corolario 2.52.** *El módulo de cohomología  $H^m(L_{m+p})$  es isomorfo a  $(\frac{M_p \otimes R}{J_g})$ .*

**Prueba.** Del Lema 2.50 se prueba que

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) = M_p \otimes_R R/I.$$

Por otro lado como

$$\text{Tor}_0(\frac{R}{I}, \frac{J_g}{J_{f,g}}) = (\frac{J_g}{J_{f,g}}) \otimes \frac{R}{I}$$

tenemos

$$E_{0,0}^2 = \frac{\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I})}{J_g} = \frac{M_p \otimes_R \frac{R}{I}}{J_g}.$$

Aquí  $J_g$  representa la imagen de la aplicación  $\wedge dg$  en la secuencia espectral del Teorema 2.51. \blacksquare

**Observación.** Debido al Corolario 2.22 podemos asumir que el generador  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Por lo tanto podemos establecer la existencia de otra secuencia espectral  $E'$  tal que  $E' \rightarrow L_{m+p}$  y  $E'^\infty = E'^2$ . Para la prueba basta notar que  $I = \langle g, f \rangle$ . Un hecho que consideramos más interesante es proporcionar un ejemplo donde los términos  $E^1$  y  $E'^1$  son diferentes. Es decir estamos proporcionando información nueva sobre la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$ .

**Observación.** Existe una secuencia espectral  $E'_{*,*}$  que converge a la cohomología del complejo  $L_{m+p}$  y colapsa en  $E'^2$ . La secuencia se obtiene al

intercambiar el rol de  $f$  por el de  $g$ . A continuación presentaremos el término  $E^1$

$$\text{Tor}_2(N_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(N_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{df} \text{Tor}_1(\frac{J_f}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(N_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{df} \text{Tor}_0(\frac{J_f}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

En el siguiente ejemplo demostramos que  $E^1$  y  $E'^1$  son diferentes.

**Ejemplo 2.53.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x,y,z)}, \eta)$ ,  $f = x^3 + y^2 + z^2$  y  $g = xy + z^2$ . Un cálculo demuestra que  $J_f = \langle 3x^2 - 2y^2, 6x^2z - 2yz, 4yz - 2xz \rangle$  y que  $I = \langle f, g \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún,  $f$  y  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Para demostrar que  $E^1$  y  $E'^1$  son diferentes es suficiente mostrar que la cohomología de  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I$  y  $K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \otimes R/I$  son diferentes. En efecto como  $f$  y  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^*(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_f, R/I)$$

y

$$H^*(K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_g, R/I).$$

Sea

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(f,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,f)} R \longrightarrow 0$$

una resolución de  $R/I$ . Como los elementos  $f, g$  pertenecen a los ideales  $J_f, J_g$  respectivamente entonces se prueba que  $K(f, g) \otimes R/J_f$ :

$$0 \longrightarrow \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \xrightarrow{0} \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \oplus \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \xrightarrow{0} \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \longrightarrow 0,$$

y que  $K(f, g) \otimes R/J_g$ :

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0.$$

Esto finaliza el ejemplo.

A continuación veremos un ejemplo donde la secuencia espectral  $E_{**}^n$  del Teorema 2.51 colapsa en  $E^1$

**Corolario 2.54.** *Si  $J_g \subset J_f$  entonces la secuencia espectral del Teorema 2.51 cumple que  $E^1 = E^\infty$ .*

**Prueba.** Una propiedad que usaremos en repetidas ocasiones en la prueba del corolario es la que pasamos a demostrar :

Recordemos que en la Sección 2.1 asumimos que ninguno de los generadores del ideal  $I$  es regular, es decir  $J_f \neq R$ . Si  $J_g \subset J_f$  entonces  $ht(J_f) = m$ . En efecto, como  $f \in \sqrt{J_f}$ ,  $g \in \sqrt{J_g}$  se tiene que  $ht(J_f) = ht(\sqrt{J_f}) \geq ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m$ . Esto a su vez significa que  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}))$  para todo  $i \neq m$  (ver Corolario 2.6). Es decir si  $w \in \Omega^*$  y  $df \wedge w = 0$  entonces existe  $w' \in \Omega^{*-1}$  tal que  $w = df \wedge w'$ .

Por otro lado para demostrar el Corolario será suficiente probar que los morfismos de conexión, dados por  $\wedge dg$ , de la secuencia exacta larga en cohomología de la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow L_{m+p} \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0$$

son nulos. En efecto, si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología a la secuencia anterior obtenemos la secuencia

$$H^{m-2}(E_p) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_1} \longrightarrow$$

$$H^{m-1}(E_p) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_0} \longrightarrow$$

$$H^m(E_p) \longrightarrow H^m(L_{m+p}) \longrightarrow \longrightarrow 0.$$

La condición  $J_g \subset J_f$  implica que  $\delta_0 = 0$ , y  $\delta_1 = 0$ . Verificaremos sólo que  $\delta_1 = 0$ , pues el otro caso es similar.

En efecto sea  $[(\bar{w}_1, \bar{w}_0)]$  una clase en el módulo  $H^{m-2}(L_{m-1})$  con  $(w_1, w_0) \in \Omega^{m-2} \oplus \Omega^{m-2}$ . Entonces

$$df \wedge w_1 + dg \wedge w_0 = f \cdot \eta_1^1 + g \cdot \eta_1^2 \in \Omega^{m-1}.$$

Si multiplicamos por  $dg \wedge$  a la igualdad anterior obtenemos

$$dg \wedge df \wedge w_1 = f \cdot dg \wedge \eta_1^1 + g \cdot dg \wedge \eta_1^2. \quad (2.15)$$

Como  $dg \wedge \eta_1^1, dg \wedge \eta_1^2 \in \Omega_R^m \simeq R$  y  $J_g \subset J_f$  se tiene que existe  $\eta_2^1, \eta_2^2$  en  $\Omega^{m-1}$  tal que  $dg \wedge \eta_1^1 = -df \wedge \eta_2^1$  y  $dg \wedge \eta_1^2 = -df \wedge \eta_2^2$ . Por lo tanto la ecuación (2.15) se escribe de la siguiente forma

$$dg \wedge df \wedge w_1 = -f \cdot df \wedge \eta_2^1 - g \cdot df \wedge \eta_2^2.$$

Si factorizamos  $df \wedge$  tenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 - f\eta_2^1 - g\eta_2^2) = 0.$$

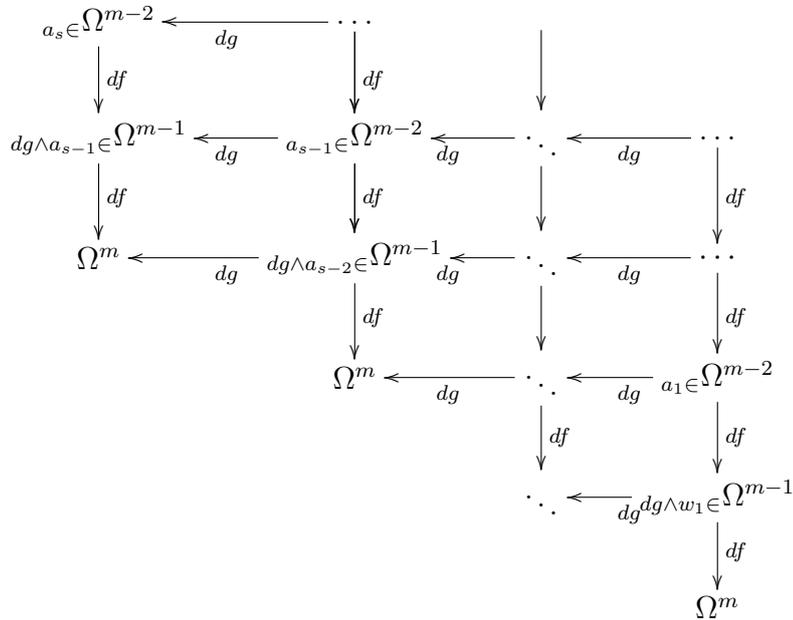
Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_1 \in \Omega^{m-1}$  tal que

$$dg \wedge w_1 = f \cdot \eta_2^1 + g \cdot \eta_2^2 + df \wedge a_1.$$

Si  $k = 0$  la prueba terminó pues  $[\overline{dg \wedge w_1}] = 0 \in H^{m-1}(E_0)$ . De lo contrario definamos  $a_0 := w_1$  y continuamos la demostración por un proceso inductivo. Admitamos como hipótesis inductiva que

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \tag{2.16}$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Por el método de la escalera en el diagrama



tenemos que existe  $a_s$  tal que  $\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}$ . En efecto de hipótesis inductiva si tiene

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \quad (2.17)$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Si aplicamos  $dg \wedge$  a (2.17) tenemos

$$dg \wedge (\eta_s + df \wedge a_{s-1}) = 0. \quad (2.18)$$

Como  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$  entonces  $\eta_s = f \cdot \eta_s^1 + g \cdot \eta_s^2$ . Como  $J_g \subset J_f$ , se tiene que  $dg \wedge \eta_s = df \wedge \eta_{s+1}$ , para algún  $\eta_{s+1} \in I\Omega^{m-1}$ . Por lo tanto la ecuación (2.18) se escribe como

$$df \wedge (\eta_{s+1} - dg \wedge a_{s-1}) = 0.$$

Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_s$  tal que

$$\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}.$$

Esto finaliza la inducción y demuestra que

$$dg \wedge a_{l-2} + df \wedge a_{l-1} = \eta_l \in I\Omega_R^{m-1}$$

para todo  $l = 1, \dots, p$ . Esto significa que

$$[(0, \dots, \overline{dg \wedge w_1})] = [(df \wedge a_{p+1} + dg \wedge a_p, \dots, \overline{df \wedge a_2 + dg \wedge a_1}, \overline{df \wedge a_1})] = 0.$$

■

**Observación.** A continuación, bajo la hipótesis  $J_g \subset J_f$ , describiremos los módulos de cohomología del complejo  $E_p$ .

**Lema 2.55.** Si  $J_g \subset J_f$  entonces

$$Gr(H^*(E_p)) = \bigoplus_{i=0}^p (Tor_{m-*}(R/I, R/J_f))_i$$

.

**Prueba.** Demostraremos que los morfismos conexión de la secuencia exacta corta

$$(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow E_{p+1} \longrightarrow E_p$$

son cero, para todo  $p \geq 1$ . En efecto si tomamos cohomología a la secuencia anterior obtenemos la secuencia exacta larga

$$H^{m-2}(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^{m-2}(E_{p+1}) \longrightarrow H^{m-2}(E_p) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$H^{m-1}(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^{m-1}(E_{p+1}) \longrightarrow H^{m-1}(E_p) \xrightarrow{\delta_0}$$

$$H^m(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^m(E_{p+1}) \longrightarrow H^m(E_p).$$

De la hipótesis  $J_g \subset J_f$  obtenemos que  $\delta_0 = 0$ . Veamos que  $\delta_1 = 0$ . En efecto, con el mismo argumento que el Corolario 2.54, sea  $x = \overline{[(\eta_p, \eta_{p-1}, \dots, \eta_1)]}$  un elemento en  $H^{m-2}(E_p)$  entonces

$$df \wedge \eta_p + dg \wedge \eta_{p-1} = f \cdot a + g \cdot b$$

donde los elementos  $a, b$  se encuentran en el módulo  $\Omega^{m-1}$ . Si aplicamos  $dg \wedge$  a la igualdad anterior podemos escribir

$$dg \wedge df \wedge \eta_p = f \cdot dg \wedge a + g \cdot dg \wedge b.$$

Como  $J_g \subset J_f$  se tiene que  $dg \wedge a = df \wedge a'$  y  $dg \wedge b = df \wedge b'$  para algún  $a'$  y  $b'$  en el módulo  $\Omega^{m-1}$ . Más aún como  $dg \wedge df = -df \wedge dg$ , la igualdad anterior se puede escribir

$$-df \wedge dg \wedge \eta_p = f \cdot df \wedge a' + g \cdot df \wedge b'.$$

Además  $H^i(\Omega, df) = H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , entonces

$$dg \wedge \eta_p = -(f \cdot a' + g \cdot b' + df \wedge \omega),$$

para algún  $\omega \in \Omega^{m-1}$ . Como  $\delta_1(x) = \overline{[dg \wedge \eta_p]} = \overline{[-(f \cdot a' + g \cdot b' + df \wedge \omega)]}$  entonces  $\delta_1(x) = 0$ .

Ahora, la secuencia

$$0 \longrightarrow (\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow E_{p+1} \longrightarrow E_p \longrightarrow 0$$

nos da el isomorfismo de espacios vectoriales

$$H^*(E_{p+1}) \simeq H^*(\overline{\Omega}, df) \oplus H^*(E_p).$$

Como

$$H^*(E_0) = H^*(\bar{\Omega}, df) \simeq \text{Tor}_{m-*}(R/I, R/J_f)$$

pues

$$(\bar{\Omega}, df) = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I$$

tenemos que  $Gr(H^*(E_{p+1})) = \bigoplus_{i=0}^p (\text{Tor}_{m-*}(R/I, R/J_f))_i$ . ■

**Observación.** Notemos que la condición  $J_g \subset J_f$  es natural. En efecto, si tomamos un generador  $f \in I$  con una singularidad aislada entonces para algún  $s \in \mathbb{N}$  tenemos  $J_g^s \subset J_f$ . Además, todas las icis clasificadas en [Looj] salvo  $H_\mu$ , con  $\mu \geq 7$ , cumplen esta condición.

**Ejemplo 2.56.** En este ejemplo presentaremos las variedades de intersección completa que cumplen y también las que no satisfacen la propiedad anterior. Los ejemplos que aquí se presentan son de dimensión cero y dimensión uno inmersas en el espacio  $\mathbb{C}^3$ , según se presentan en [Looj].

Símbolo	Fórmula	Número de Tjurina
$F_{p+q+1}^{p,q}; 2 \leq p \leq q$	$(xy, x^p + y^p)$	$p + q$
$G_5$	$(x^2, y^3) = (x^2 + y^3, y^3)$	7
$G_7$	$(x^2, y^4) = (x^2 + y^4, y^4)$	10
$H_\mu; 6 \leq \mu$	$(x^2 + y^{\mu-3}, xy^2)$	$\mu + 2$
$I_\mu, 7 \leq \mu$	$(x^2 + y^3, y^k)$ si $\mu = 2k - 1$	$\mu + 2$
$I_\mu, 7 \leq \mu$	$(x^2 + y^3, xy^{k-1})$ si $\mu = 2k$	$\mu + 2$
Símbolo.	Fórmula.	
$S_\mu, 5 \leq \mu$	$(x^2 + y^2 + z^{\mu+3}, yz)$	
$T_\mu; \mu = 7, 8, 9$	$(x^2 + y^3 + z^\mu, yz)$	
$U_7$	$(x^2 + yz, xy + z^3)$	
$U_8$	$(x^2 + yz, xy + xz^3)$	
$U_9$	$(x^2 + yz, xy + z^4)$	
$W_8$	$(x^2 + yz, y^2 + z^3)$	
$W_9$	$(x^2 + yz, y^2 + xz^2)$	
$Z_9$	$(x^2 + y^2 + z^3, xy)$	
$Z_{10}$	$(x^2 + yz^2, y^2 + z^3)$	

# Bibliografía

- [A] Atiyah, M.F; Macdonald, I.G.; *Introduction to Commutative Algebra*; Addison-Wesley; 1969.
- [BH] Bruns, W.; Herzog, J. ; *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 1996.
- [Eis] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1995.
- [Eis1] Eisenbud, D., *The Geometry of Syzygies. A second Course in Commutative algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1995.
- [G] Giusti, M.; *Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples*; C.R. Acad. Sc. Paris, 284, 168-170, (1977).
- [HS] Hübl, R., Swanson, I., *Derivations and the Integral Closure of Ideals*, Proc. of Amer. Math. Soc., 127, 3503 – 3511, 1999.
- [HKR] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A., Differential forms on regular affine algebras, Trans. AMS 102 (1962), 383-408. 26 # 167 HOOD, C, JONES, J.D.S., Some algebraic properties of cyclic homology
- [K] Kunz, E., *Kähler Differentials*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986.
- [Looj] Looijenga E., *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, Cambridge University Press, 1984.
- [Mats] Matsumura, H., *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, 1970.
- [Mich] Michler, R., Hodge-Components of Cyclic Homology for Affine Quasi-Homogeneous Hypersurfaces, K-Theory, Strasbourg, 1992, 321 – 334.

- [Mich1] Michler, R., *Torsion of differentials of hypersurfaces with isolated singularities*, J. Pure and App. Algebra, 104 (1995), 81-88.
- [Mich2] Michler, R., *Invariants of Singular Plane Curves*, Fields Institute Communications, 00, (1997).
- [Mich3] Michler, R., *On the Number of Generators of the Torsion Module of Differentials*, Procc. Amer. Math. Soc., 129 n 3, 639-643 (2000).
- [Wei] Weibel Ch., *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [ZS] Zariski, O., Samuel, P., *Commutative Algebra*, Vol. I, II, Van Nostrand, Princeton (1958, 1960), 104 (1985).